OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURAL
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER
HEINRICH BRANDT

SERIES PRIMA

OPERA MATHEMATICA

VOLUMEN SEXTUM DECIMUM SECTIO ALTERA

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETIC

BASILEAE MCMXXXV

VENDITIONI EXPONUNT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI
ORELL FÜSSLI TURICI ET LIPSIAE

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD THEORIAM SERIERUM INFINITARUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM SECTIO ALTERA

EDIDIT

CARL BOEHM

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BASILEAE MCMXXXV

VENDITIONI EXPONUNT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI
ORELL FÜSSLI TURICI ET LIPSIAE

v. 16
pt. 2.

TYPIS EXCUSSIT B. G. TEUBNER LIPSIAE

ÜBERSICHT
ÜBER DIE BÄNDE 14, 15, 16, 16* DER ERSTEN SERIE

EINLEITUNG

In den Bänden 14, 15, 16, 16* der ersten Serie sind 82 EULERsche Abhandlung über unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche vereinigt. Sie bilden zusammen m dem ersten Band von EULERS *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae 1748, *Op omnia* I_8) einen der wichtigsten Ausschnitte aus EULERS Gesamtwerk. Einzelne jen 82 Abhandlungen stehen in enger Berührung mit gewissen Teilen der *Introductio* oder *Institutiones calculi differentialis*[1]) (Petropoli 1755, *Opera omnia* I_{10}), weitaus die meist gehen über den Rahmen der *Introductio* hinaus und mehr als eine bildet den Ausgang punkt für sehr bedeutende Forschungen der späteren Zeit; es seien hier hervorgehobe die Theorie der Gammafunktion, die Ableitung der Funktionalgleichung der RIEMANNsch Zetafunktion und die Untersuchung der hypergeometrischen Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{1 \cdot 2 \gamma(\gamma-1)} x^2 + \cdots$$

(EULER selbst verstand übrigens im Anschluß an WALLIS unter *series hypergeometri* etwas ganz anderes; vgl. S. XL). Die geniale Herleitung der binomischen Reihe (in d

1) Der Hauptinhalt dessen, worüber im ersten Abschnitt dieser Übersicht berichtet wi findet sich auch sowohl in den *Institutiones calculi differentialis* wie auch mit Ausnahme d EULERschen Summenformel in der *Introductio*. In diese hat EULER außerdem das Allgemei seiner Untersuchungen über Kettenbrüche aufgenommen (siehe diese Übersicht VI) und einig Besondere wie die Kettenbrüche für quadratische Irrationalitäten, für $\frac{1}{e-1}$ und den BROUNCKERschen Kettenbruch für $\frac{4}{\pi}$. Für diesen einen einfachen Beweis zu finden und womöglich den u bekannten BROUNCKERschen Beweis wiederzufinden, war immer wieder das Bemühen EULERS (v E 123, 522, 616, 745; *Opera omnia* I_{14}, p. 296 und 323; I_{15}, p. 325; I_{16}, p. 44; I_{16^*}, p. 1 und 186; ferner diese Übersicht S. LXXX und CI).

Abhandlung 465) hätte EULER wohl in seine *Introductio* aufgenommen, sow
CAUCHY in seine *Analyse algébrique* und ABEL in seine Untersuchungen üb
mialreihe aufgenommen hat[1]), wenn er sie zur Zeit, als er die *Introductio* s
besessen hätte.

Zweifellos ist der Gehalt der EULERschen Arbeiten über unendliche Algo
nicht ausgeschöpft, und es wäre für junge Forscher, die mit dem Rüstzeug
das wir den zwei Jahrhunderten seit EULERS Anfängen verdanken, eine lohne
EULERsches Gedankengut mit dem kritischen Geiste und den strengeren Verf
Zeit zu durchdringen und damit neu zu beleben. Mögen die Bände I_{14-16^*} der
solche Forschung anregen und erleichtern.

In der folgenden Übersicht betrachten wir die Abhandlungen der Bänd
16* nicht in der Reihenfolge ihrer Entstehung, sondern teilen sie in sieben e
sprechende Gruppen, was natürlich nicht ohne Willkür möglich ist; viele der z
den Arbeiten gehören eigentlich mehreren jener Gruppen an und nicht wenig
in engem Zusammenhang mit Untersuchungen EULERS, die in anderen Bände
omnia, insbesondere in den Bänden I_{17-19} über Integralrechnung Platz finden

In die erste Gruppe haben wir 14 Abhandlungen (25, 41, 46, 47, 55, 61,
597, 617, 642, 664, 746) aufgenommen, in denen EULER zwei seiner Glanzleis
wieder von neuen Gesichtspunkten und in neuem Zusammenhang, manchmal a
lediglich wiederholend betrachtet, nämlich erstens seine Summenformel, die ma
Bezeichnung so schreibt[2]):

---

1) AUGUSTIN CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique, 1re P*
algébrique, Paris 1821; Oeuvres, série 2, tome 3. — NIELS HENRIK ABEL, Unters
die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$, Journal für die reine und angewandte Mat
1829, S. 311; Oeuvres, éd. SYLOW-LIE, Bd. 1, S. 219. — CAUCHYS *Analyse algébr*
EULERS *Introductio* nicht zu denken ist, hat für die erste Hälfte des 19. Jahrhundert
Bedeutung wie der erste Band der *Introductio* für die vorhergehenden Jahrzehnt
gleichen Stoffgebiete der erste große Fortschritt über die *Introductio* hinaus, und
in erster Linie in der schärferen Fassung der Begriffe, insbesondere auch des Konv
im Zusammenhang damit steht die unbedingte Ablehnung des Gebrauchs divergente
CAUCHY und dann auch durch ABEL in scharfem Gegensatz zur Auffassung EULERS
die Ausführungen auf S. XII—XIV dieses Berichts.

2) Die Summenformel hat bald nach EULER und zweifellos unabhängig von i
MAC LAURIN gefunden: *A Treatise of fluxions,* Edinburgh 1742, art. 829, Bd. 2, p.
wie bei EULER als Beispiel die Summation der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ mit dem Erg
(vgl. (9a) S. XIX), doch erkennt MAC LAURIN nicht die Übereinstimmung mit $\frac{\pi^2}{6}$.

$$\int_a^{a+x} f(t)\,dt = x\,\frac{f(a+x)+f(a)}{2} - \frac{B_2 x^2}{2!}\,[f'(a+x) - f'(a)] - \frac{B_4 x^4}{4!}\,[f'''(a+x) -$$

(1)

$$\ldots - \frac{B_{2p-2}\,x^{2p-2}}{(2p-2)!}\,[f^{(2p-3)}(a+x) - f^{(2p-3)}(a)] + R$$

oder so:

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(a+nh)}{2}\right]$$

(2)

$$- \frac{B_2 h^2}{2!}\,[f'(a+nh) - f'(a)] - \frac{B_4 h^4}{4!}\,[f'''(a+nh) - f'''(a)]$$

$$\cdots - \frac{B_{2p-2}\,h^{2p-2}}{(2p-2)!}\,[f^{(2p-3)}(a+nh) - f^{(2p-3)}(a)] + R,$$

wobei R das Restglied bedeutet, dem man verschiedene Formen geben kann, und zw

die Summation der Reihen $s_{2k} = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k}}$ mit dem Ergebnis

(3) $$s_{2k} = (-1)^{k-1}\,\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}\,B_{2k}.$$

Die Bernoullischen Zahlen[1])

(4)
$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_3 = B_5 = \cdots = B_{2k+1} = 0,$$
$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730} \cdots$$

verbinden diese auf den ersten Blick scheinbar weit auseinander liegenden Gegenstän

---

Encyklopaedie der math. Wiss. (Bd. II 1, 1, Leipzig 1899—1916, S. 167) der Verfasser des Artikels II A 3 von „einer von Mac Laurin gefundenen und gewöhnlich Euler zug benen Summenformel“ spricht, so ist dies ganz abwegig, da zwei Abhandlungen Euler die Summenformel vor Mac Laurins *Treatise* erschienen sind. Ob Euler die Stirlingsche (James Stirling, *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serie finitarum*, London 1730, propositio 28, p. 129), die auf den Sonderfall $f(x) = \log x$ der S formel hinausläuft, vor seiner ersten i. J. 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten lung über diese gekannt hat, läßt sich nicht feststellen.

1) Die ersten fünf von Null verschiedenen dieser Zahlen finden sich zuerst in *coniectandi* (Basel 1713) des Jakob Bernoulli S. 98. Die Bezeichnungsweise ist schwank nennt Euler (z. B. I_{16}, p. 93) und viele andere nach seinem Vorgang mit Außerachtlass $B_1 = \frac{1}{2}$ und $B_3 = B_5 = B_7 \cdots = 0$, sowie des Vorzeichens Bernoullische Zahlen die fol

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{5}{66}, \quad \frac{691}{2730}, \cdots;$$

Es möge hier noch, um an späterer Stelle (S. XXVII) den Bericht über
sche Abhandlungen zu erleichtern, eine Formel Platz finden, die man erhä
Gleichung (2) für gerades $n = 2m$ und mit der Abkürzung $a + 2mh = b$ s

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(2m-1)h) + f(a+2$$

$$(2') \qquad = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{B_2 h}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 h^3}{4!}[f'''(b) -$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2p-2}h^{2p-3}}{(2p-2)!}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R$$

und sie von der gleichartigen Gleichung

$$2[f(a) + f(a+2h) + f(a+4h) + \cdots + f(a+(2m-2)h) + f(a+$$

$$(2'') \qquad = f(a) + f(b) + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{B_2 2^2 h}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 2^4 h^3}{4!}[f'''(b)$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2p-2}2^{2p-2}h^{2p-3}}{(2p-2)!}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R'$$

abzieht. Man erhält so:

$$f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - f(a+3h) + \cdots - f(a+(2m-1)h)$$

$$(2a) \qquad = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{B_2 h(2^2-1)}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 h^3(2^4-1)}{4!}[f'''(b$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2p-2}h^{2p-3}(2^{2p-2}-1)}{(2p-2)!}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] +$$

Die zweite Gruppe, welcher die 10 Abhandlungen 19, 20, 43, 189, 190,
652, 661 angehören, enthält Arbeiten über die Gammafunktion[1]) und im A

---

gelegentlich (*Opera omnia* I_{15}, p. 598) die folgenden:

$$\frac{3}{6}, \quad \frac{5}{30}, \quad \frac{7}{42}, \quad \frac{9}{30}, \quad \frac{11 \cdot 5}{66}, \quad \frac{13 \cdot 691}{2730}, \quad \ldots$$

an anderer Stelle (I_{16}, p. 56) wieder die hieraus durch Verdoppelung entstehende
Anmerkung 3 auf S. 92 von Bd. I_{15}, der noch der Hinweis auf Sserebrenniko
Abhandlungen (8) Bd. 16, Nr. 10, 1903 anzufügen ist, wo die ersten 90 von N
Bernoullischen Zahlen berechnet werden. Euler selbst hatte von den Zahlen B
berechnet (E 393, *Opera omnia* I_{15}, p. 93). Weitere Literatur bei Ely, *Amer
Mathematics*, Bd. 5, 1882, p. 228.

1) Wegen der Bezeichnung dieser Funktion siehe die Anmerkung 1 S. XI
p. LVIII—LXV.

Funktion, die von EULER durch Ausdehnung des Symbols $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ auf nicht gan
zahlige Veränderliche, also durch Interpolation gewonnen wurde, die EULERschen Arbeit
über Interpolation überhaupt. Außerdem ist eine Einzelschrift (nämlich 583) über die EULE
sche Konstante, die er selbst meist C, gelegentlich auch O, Δ oder λ nannte, während hen
die Bezeichnung γ üblicher ist[1]), in diese Gruppe aufgenommen wegen der Beziehung dies
Konstanten zur Γ-Funktion. Die Abhandlungen dieser zweiten Gruppe überdecken sich te
weise mit solchen der Bände I_{17-19} (Integrale). Die Trennung wurde so vorgenommen, d
den Bänden 14, 15, 16, 16* die Abhandlungen zugewiesen wurden, die nicht im wesentlich
mit bestimmten Integralen arbeiten, obwohl eine strenge Scheidung nicht möglich war.

In der dritten Gruppe werden 13 Arbeiten (128, 246, 447, 561, 562, 592, 636, 65
686, 703, 704, 747, 810) besprochen, die sich mit den trigonometrischen Funktionen u
mit trigonometrischen Reihen beschäftigen, in der vierten Gruppe 9 Abhandlungen (46
575, 584, 637, 663, 709, 726, 743, 768) über die binomische Reihe und über Binomia
koeffizienten.[2])

Die fünfte Gruppe enthält 17 Abhandlungen (72, 247, 326, 352, 432, 453, 477, 48
507, 551, 565, 616, 684, 685, 710, 722, 736), die verschiedenen anderen Funktionen u
Reihen gewidmet sind.

In der sechsten Gruppe sind 11 Abhandlungen (71, 122, 123, 281, 522, 550, 55
593, 742, 745, 750) über unendliche Produkte und Kettenbrüche vereinigt.

Die siebente Gruppe endlich enthält 7 EULERsche Arbeiten (74, 125, 275, 280, 70
706, 809) über die Berechnung der Zahl π. Für die bekannten π-Berechner ADRIANU
ROMANUS, LUDOLF VAN CEULEN, ABRAHAM SHARP u. a. (vgl. *Opera omnia* I_{14}, p. 245) kame
die EULERschen Vorschriften freilich zu spät, ähnlich wie die besten Verfahren zur Berechnun
der Logarithmen erst erfunden wurden, als die Tafeln im wesentlichen schon fertig waren.

Wir beendigen, indem wir an die zuletzt erwähnten Rechenarbeiten anknüpfen, die
Einleitung mit einigen Bemerkungen über die wissenschaftsgeschichtliche Bedeutung der hi
vorliegenden EULERschen Leistungen auf dem Gebiete der unendlichen Reihen, Produk

1) C in E 43, I_{14}, p. 94; E 583, I_{16}, p. 571 und in den *Inst. calc. diff.*, I_{10}, p. 33
Const. in E 47, I_{14}, p. 118; O in E 393, I_{15}, p. 115; Δ in E 368, I_{27}; λ in E 432, I_{16}, p. 13
Die Bezeichnung γ, die wir in dieser Übersicht benutzen, rührt von MASCHERONI her; siehe da
über I_{10}, p. LXIV.

2) Wir bezeichnen den Koeffizienten von x^ν in der Potenzreihe für $(1+x)^\alpha$ mit $\binom{\alpha}{\nu}$
EULER schrieb $\left[\begin{matrix}\alpha \\ \nu\end{matrix}\right]$ (in E 575 und 584) und $\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)$ (in E 663, 709, 726, 768).

3) Die gegen Ende des 18. Jahrhunderts unter der Leitung PRONYS vorgenommene Ne
berechnung der Tafeln („*Tables du Cadastre*", nicht gedruckt), wodurch es gelang, die letzte
Fehler der alten Tafeln zu beseitigen, benutzt zur Berechnung der Primzahllogarithmen eine Reih
die (man möchte sagen sonderbarer Weise) bei EULER nicht vorzukommen scheint. Auch die vi

und Kettenbrüche, wobei wir schon deswegen ganz im Allgemeinen verbleibe
wir den dann folgenden Einzelausführungen dieses Berichts nicht allzusehr vo

EULERS unermüdliche Freude am Zahlenrechnen war stets beherrscht danken, die Tragweite solcher Verfahren darzutun, die geeignet waren, die A ners durch die Überlegung des Mathematikers abzukürzen. Rechenfehler gröt sind ihm selten unterlaufen; doch befolgt er nicht die strenge, erst später Geltung gelangte Regel, daß der Fehler nicht mehr als eine halbe Einheit d beibehaltenen Stelle betragen darf.[1] Bei den halbkonvergenten Reihen, di ausgiebig benutzte und die er auch in ihrer Wesensart richtig erkannte, sicherem Takt die Stelle, an der am günstigsten mit der Summation aufgehö war er sich wenigstens an Beispielen klar darüber, daß es sich um div handelt.[2] Aber auch solchen divergenten Reihen, die keineswegs zur Klasse genten gehören, kam nach seiner Auffassung, die sich freilich schon bei ei Zeitgenossen[3] und erst recht später nicht durchsetzen konnte, ein bestimmt zu, den er durch folgende Festsetzung sicher stellen zu können glaubte: D unendlichen Reihe ist der Wert des endlichen Ausdrucks, durch dessen E Reihe entsteht.[4] Diese Auffassung hat mit gehöriger Einschränkung hinte WEIERSTRASSschen Begriff der analytischen Fortsetzung einen bestimmten Sinn und damit eine gewisse Berechtigung erlangt. Nachdem man noc Jahrzehnten die EULERschen mit divergenten Reihen arbeitenden Ansätze rettungslos verfehlt angesehen hatte, braucht man heute nur manche seiner

weniger sinnvolle Berechnung der Zahl π auf 200 Dezimalstellen durch DASE (reine und angewandte Mathematik 27, 1844, S. 198) benutzt keine der von EU handlung 809 (I_{14}, p. 267) besonders empfohlenen und wohl auch zweckmäßigst dern die ganz zum Gedankenkreise dieser Abhandlung gehörige, dort aber zufäll mende Formel

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

1) Oder mit den Worten von C. F. GAUSS (Werke Bd. 3, S. 237): „daß dem wahren Wert allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anza stellen möglich ist."

2) Vgl. S. XVII.

...llung 245 *de seriebus divergentibus, Opera omnia* I_{11}, p. 5

... *Reihen*, Tübingen 1898, § 11.

Male in einem Briefe an CHR. GOLDBACH vom 7. Augus *expressionis illius finitae, ex cuius evolutione illa serie* *de quelques célèbres géomètres du 18me siècle publiée* ..., p. 324); später fast wörtlich ebenso E 247, § 12 (176).

etwas anders zu begründen, um ihnen einen guten Sinn zu geben. Die Anfänge der i diesem Jahrhundert weit entwickelten Theorie der divergenten Reihen, die ein Teil de Theorie der analytischen Fortsetzung ist und die schon sehr wichtige Ergebnisse erzie hat[1]), gehen also wie so viele Anfänge der heutigen Mathematik auf EULER zurück; es i freilich keineswegs so, als ob EULER hinterher gegen CAUCHY und ABEL recht behalte hätte.[2]) Seine vorhin erwähnte Definition der Reihensumme ist nicht nur, weil sie de Möglichkeit mehrdeutiger Funktionen keine Rechnung trägt[3]), sondern vor allem wegen de folgenden Mangels unhaltbar. Wenn die Reihenglieder reine Zahlen sind (und nicht Funk tionen einer Veränderlichen), wie im Falle

$$(5) \qquad 1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots,$$

so ist ein endlicher Ausdruck, durch dessen Entwicklung die Reihe entsteht, nicht eindeuti vorhanden. Ist z. B. die Summe der Reihe (5) der Wert, den die durch die Reihe

$$(6) \qquad \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

definierte ganze transzendente Funktion von s für $s = -4$ annimmt, oder ist sie der We den die durch die Reihe

$$(7) \qquad x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + \cdots$$

definierte rationale Funktion von x mit dem Nenner $(1+x)^5$ an der Stelle $x = 1$ annimm Daß diese beiden Werte miteinander übereinstimmen, ist ein beweisbarer merkwürdig Lehrsatz (vgl. S. LXXXII), der aber so lange nur wie ein zufälliges Ergebnis erschei als er nicht als Folge eines viel allgemeineren Lehrsatzes der Funktionenlehre erschloss werden kann, was zweifellos möglich ist. Durch einen solchen könnte wohl die EULERsc Definition für die Summe einer divergenten Reihe an Genauigkeit und Tragweite gewinn

Die Summen der Reihen

$$(8) \qquad 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots \qquad (\text{für } k = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

wovon (5) ein besonderer Fall ist, hat EULER unter Zugrundelegung der Definition

$$(9) \qquad \lim_{x \to 1} (x - 2^k x^2 + 3^k x^3 - 4^k x^4 + \cdots)$$

mehrfach ermittelt; sein Ergebnis ist für $k > 0$

$$(10) \qquad 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots = \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} B_{k+1}.$$[4])

1) Siehe z. B. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3. Aufl., Ber 1931, Kapitel XIII.

2) Vgl. die Anmerkung 1 S. VIII.

3) Welches ist z. B. nach EULER der Wert der Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ $x = 3$ oder $x = -3$?

4) Die Existenz des Grenzwerts (9) ist, da es sich um eine für $x = 1$ nicht unendl werdende rationale Funktion handelt, klar; um seinen Wert zu finden, ersetze man in (9) x du

Wenn EULER in der Behandlung allgemeiner Fragen der Konvergen
Restabschätzung seiner Zeit nicht voraus war und wenn Bemerkungen, di
der strengen von CAUCHY begründeten (*Analyse algébrique* 1821) und fün
durch die Theorie der Irrationalzahlen (CANTOR, DEDEKIND, WEIERSTRAS
gekommenen Grenzwerttheorie gedeutet werden können, bei ihm nur selte
unbewiesen sind[1]), während uns viele andere seiner diesbezüglichen Erörter
unklar und unhaltbar erscheinen[2]), müssen wir bedenken, daß es eines u
Jahrhunderts nach dem Erscheinen der ersten EULERschen Arbeiten bed
diesen Fragen zu voller Klarheit zu gelangen, wie auch, daß er im geg
Falle fast immer gefühlsmäßig das Richtige traf, schon weil er die Na
Zahlenrechnung nie aus dem Auge verlor und ihm daher stets an Konv
guter Konvergenz gelegen sein mußte, die er nötigenfalls durch Umfor

---

e^{-t} mit $t \to 0$, dann erhält man für $k > 0$ den mit $(-1)^{k+1}$ multiplizierten
quotienten für $t \to 0$ der Funktion

$$e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t} - e^{-4t} + \cdots = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} = -\sum_0^\infty \frac{2^{\nu+1}-1}{(\nu+1)!} B_{\nu+1}$$

d. h. man erhält: $\frac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1}(-1)^{k+1}$. Das Ergebnis gilt auch für $k = 0$;
man den Faktor $(-1)^{k+1}$ weglassen (vgl. (4) S. IX). Siehe K. KNOPP, *Theorie*
der unendlichen Reihen, 2. Aufl., Berlin, S. 508. EULER gelangt zur Gleichung
Wegen als den hier angegebenen; vgl. S. XXVIII und LXXXIII.

1) Z. B. läßt sich aus E 43 (*Opera omnia* I_{14}, p. 88 unten und 90 oben
genz einer unendlichen Reihe folgende Beziehung zwischen den Teilsummen al
hinreichende Bedingung herauslesen:

$$\lim_{i \to \infty} s_{ni} - s_i = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Da es sich dort um eine Reihe mit positiven Gliedern handelt, ist die Beding
es geht zu weit, wenn R. REIFF (*Geschichte der unendlichen Reihen*, Tübingen 1
dieser vereinzelten, nicht scharf gefaßten und nicht bewiesenen Stelle EUL
CAUCHYS in der Erfindung der allgemeinen Konvergenzbedingung angesehen wissen

2) Siehe beispielsweise E 247 (*de seriebus divergentibus*), § 8, I_{14}, p. 592.
ohne Begründung gemachte Bemerkung, daß die divergente Reihe $\sum_0^\infty a_\nu$ mit
immer den Wert ∞ habe, wenn die a_ν unterhalb einer endlichen Schranke b
richtigen Kern; doch genügt statt der Bedingung der Beschränktheit der a_ν
$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{a_\nu} = 1$; denn dann strebt die für $|x| < 1$ konvergente Reihe $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ für
Viel stärker divergente Reihen haben dagegen nach EULER eine endliche Summ
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$, deren Summe $\frac{1}{1-2} = -1$ ist.

anderen kaum erreichter Geschicklichkeit herstellte. Allgemeine Prinzipien dagegen, abstrak Begriffsbildungen und logische Verfeinerungen waren seinem Wesen fremd. Ihn lockte d Einzelfall; neue Funktionen zu bilden und zu untersuchen war für ihn eine Liebling aufgabe (vgl. das in der Abhandlung 565 aufgestellte Programm). Heutzutage lernt ma ungeheuer viel Funktionentheorie, aber genau kennt man nur sehr wenige Funktionen, u das sind vor allem diejenigen, die EULER in seiner *Introductio* behandelt hat. Außerde kennen einige etwa noch die EULERsche Gammafunktion und die ebenfalls von EULER z erst untersuchte RIEMANNsche Zetafunktion. Und wenn jemand gar mit der hypergeomet schen Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vertraut ist, so steht er gleichfalls auf EULERschem Bode Nur bei den elliptischen Funktionen hatte er trotz vieler Bemühungen kein Glück; ih Entdeckung mußte er seinen Nachfolgern überlassen. Aber sollte nicht sonst in EULE Arbeiten noch mancher Keim schlummern, der zu späterer Blüte berufen ist?

Bei den unendlichen Kettenbrüchen, deren erste zusammenfassende Darstellung u vielen Einzeluntersuchungen man ihm verdankt, kümmert sich EULER fast gar nicht u die Konvergenz.[1]) Diese Lücke auszufüllen, konnte nicht Aufgabe dieses Berichtes sein; e junger Forscher, der O. PERRONS *Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig und Berlin 191 durchgearbeitet hat, mag in der Untersuchung von Zahlen und Funktionen, die EUL durch Kettenbrüche dargestellt hat, ein lohnendes Betätigungsfeld finden.

Der Leser der Abhandlungen wird selbst merken, wie EULERS mathematische Da stellung und Ausdrucksweise die Schwerfälligkeit der Zeit vor ihm bald verliert und imm vollkommener wird. Daß der Gebrauch von *Indices* erst später allgemein wird, währen EULER für die Reihen $s_2, s_4, s_6, \ldots$ etwa $P', Q', R', \ldots$ (z. B. E 41) oder $\int \frac{1}{z^2}$ us (z. B. E 477) schreibt, mag vielleicht mit Schwierigkeiten des Drucks zusammenhängen. D Fortschritt in der mathematischen Ausdrucksweise, der seitdem über EULER hinaus erzi wurde, erscheint gering gegenüber dem Fortschritt, den die EULERschen Arbeiten über d vorausgehende Zeit zeigen, wofür ihm zwar nicht das alleinige, aber doch das Hau verdienst zukommt.[2])

Um die Darstellung dieser Übersicht zu vereinfachen und leichter lesbar zu mache bedienen wir uns der heutigen Schreibweise von Ausdrücken und Formeln statt der EUL schen Bezeichnungen, die außerdem nicht einheitlich sind, sondern von einer Abhandlu zur andern wechseln.

---

1) Einfache Konvergenzüberlegungen finden sich in Abhandlung 281, § 34; *Opera om* I15, p. 48.

2) Vgl. EULERS Ausführungen über den Wert einer guten Bezeichnung in der Einleitu zur Abhandlung 246 (*Opera omnia* I14, p. 542).

I. DIE EULERSCHE SUMMENFORMEL.

DIE REIHEN $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k}}$. DIE BERNOULLISCHEN Z

Die EULERsche Summenformel findet sich mit kaum angedeuteten
20. Juni 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 25

Methodus generalis summandi progressiones

(*Opera omnia* I14, p. 42—72) unter folgender Form

$$(1) \qquad s = \int t\,dn + \alpha t + \frac{\beta\,dt}{dn} + \frac{\gamma\,d^2t}{dn^2} + \frac{\delta\,d^3t}{dn^3} + \cdots,$$

wobei t das allgemeine (zum Index n gehörige) Glied einer Reihe, s
ersten Glieder bedeutet. Für die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ werden Rekr

$$(2) \qquad \begin{gathered} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}, \\ \delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \end{gathered}$$

angegeben, bis das Bildungsgesetz klar ist, das natürlich auf die allg
von S. XXI für die BERNOULLIschen Zahlen hinausläuft; es ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{gathered} \alpha = \frac{1}{2}(= -B_1), \quad \beta = \frac{1}{12}\left(= \frac{B_2}{2!}\right), \quad \gamma = 0\left(= \frac{B_3}{3!}\right. \\ \delta = \frac{1}{720}\left(= \frac{-B_4}{4!}\right), \quad \varepsilon = 0\left(= \frac{B_5}{5!}\right), \quad \zeta = \frac{1}{30240}\left(= \right. \end{gathered}$$

Die Summenformel wird in den darauffolgenden Beispielen der A
ein einziges Mal verwendet. Die als Beispiele gebrachten Reihensumma
mehr im wesentlichen darauf, daß aus Reihen, deren Glieder Funktio
lichen und deren Summen bekannt sind, durch Multiplikation mit Poly

rentiation und Integration wieder Reihen mit angebbarer Summe gebildet werden, z. B. a der geometrischen Reihe, aus der Reihe für e^x usw.[1])

Ein Beispiel, nämlich EULERS Ansatz für die Integraldarstellung der Summe

$$\sum_{1}^{n} \frac{x^{\nu}}{(a\nu + b)^{m}} \tag{4}$$

möge in dieser Übersicht genügen, ohne daß es einen vollen Begriff von EULERS Erfindung kraft geben könnte. Im Falle $m = 1$ findet er, daß diese Summe gleich

$$\frac{1}{a}\, x^{-\frac{b}{a}} \int_{0}^{x} \frac{t^{\frac{b}{a}}(1 - t^{n})}{1 - t}\, dt \tag{5}$$

ist, was man durch Differenzieren leicht bestätigt. Den EULERschen Ausdruck für (4) b beliebigen ganzzahligen $m > 0$ findet man am einfachsten aus (5) durch m-maliges Diff renzieren nach b (EULER geht anders vor; die von ihm gefundene Summe für (4) ste I_{16}, S. 56). Wir heben noch den vereinfachten Fall $x = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, $n = \infty$ hervo

$$-\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2}} = \int_{0}^{1} \frac{\log t}{1 - t}\, dt\,; \tag{6}$$

weil wir mit dieser Formel zu einer Frage gelangen, welche die Mathematiker des 18. Jah hunderts (außer EULER insbesondere auch die Brüder JAKOB und JOHANN BERNOULLI) hohem Maße beschäftigt hat, nämlich zu der Frage[2]): Kann man den Wert der Reihe

$$s_{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2}} \tag{7}$$

in einfacher Weise durch bekannte Größen ausdrücken? und weiter: Gelingt dies für d allgemeineren Reihen

$$s_{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n}} \qquad (n = 2, 3, 4, 5, \ldots) \tag{8}$$

Ihre Beantwortung wurde zu einem der schönsten Triumphe EULERS.

1) Statt des Buchstabens e gebraucht hier EULER noch c; vgl. hierzu die Anmerkung S. 128 von Band I_8 und die Anmerkung zu S. 143 der Abhandlung 61 von I_{14}, der ersten Stel jenes Bandes, wo e in der üblichen Bedeutung benutzt wird. In der nämlichen Abhandlung (führt EULER auch für den halben Umfang des Einheitskreises die Bezeichnung π ein, die si zum ersten Male 1706 bei W. JONES findet: *Synopsis Palmariorum Matheseos* S. 243.

2) Näheres siehe in dem I_{14}, S. 156—176 wieder abgedruckten Aufsatze P. STÄCKELS (a *Bibliotheca Mathematica* 3_8, 1907—1908, p. 37—54): *Eine vergessene Abhandlung LEONHA EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*; vgl. auch die Anmerkun

Die Formel (6) findet sich schon in einer der Abhandlung 25 vo
lich in der am 5. März 1731 der Akademie vorgelegten Abhandlung 20

De summatione innumerabilium progressionum

(*Opera omnia* I_{14}, p. 25—41); diese hat in Anlage und Inhalt vieles mit
scheidet sich von ihr durch die weniger vollkommene Darstellung und d
punkt: es wird dort die schon in der vorhergehenden Abhandlung 19
gestellt, für Summen wie z. B. (4) Ausdrücke zu finden, die (wie (5))
zahliges n einen Sinn haben; deshalb wurde diese Abhandlung in die zw
polation usw.) der vorliegenden Übersicht aufgenommen. Sie ist aber fü
Gruppe zu besprechenden Reihen (8) insofern wichtig, als an ihrem En
der rechten Seite von (6) und damit die Reihe s_2 in (7) auf 6 Dezima
wird und zwar auf eine ausgezeichnete und sehr merkwürdige Weise.
der Art EULERS, einen Ausdruck $\left(\text{wie die Reihe } \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}\right)$, dessen Natur z
zur Aufgabe gesetzt hatte, zunächst zahlenmäßig zu untersuchen. Zur
mittels des Integrals auf der rechten Seite von (6) ging er nun so
dieses Integral in zwei:

$$-s_2 = \int_0^x \frac{\log t}{1-t}\,dt + \int_x^1 \frac{\log t}{1-t}\,dt,$$

wo x irgend eine Zahl zwischen 0 und 1 ist; in dem zweiten Integrale
stitution $t = 1 - \tau$ und erhielt mit $y = 1 - x$

$$\begin{aligned} s_2 &= -\int_0^x \frac{\log t}{1-t}\,dt + \int_0^y \frac{\log(1-\tau)}{-\tau}\,d\tau \\ &= -\sum_0^\infty{}_\nu \int_0^x t^\nu \log t\,dt + \sum_1^\infty{}_\nu \int_0^y \frac{\tau^{\nu-1}}{\nu}\,d\tau \\ &= \sum_1^\infty{}_\nu \left[-\frac{t^\nu}{\nu}\log t + \frac{t^\nu}{\nu^2}\right]_{t=0}^{t=x} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{y^\nu}{\nu^2} \\ &= \log(1-x)\log x + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{x^\nu}{\nu^2} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{y^\nu}{\nu^2}\,. \end{aligned}$$

---

zu S. 180 von Band I_8 und drei daselbst, wie auch in dem soeben erwähnte
satze angeführte Veröffentlichungen G. ENESTRÖMS, *Biblioth. Math.* 4_3, 18
p. 248; 7_3, 1906—1907, p. 126.

1) Danach ist die Angabe der Anmerkung 2, I_{14}, p. 162 des in der
merkung erwähnten STÄCKELschen Aufsatzes zu berichtigen und zu ergänze

Wählt man hier, was am einfachsten ist, $x = y = \frac{1}{2}$, so findet man

$$(9) \qquad s_2 = (\log 2)^2 + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{4^2} + \cdots$$

Die nunmehr auf der rechten Seite stehende Reihe konvergiert recht gut, und le
kann als bekannt angesehen werden. Als ermittelten Wert für s_2 gibt EULER[1])

$$(9\text{a}) \qquad s_2 = 1{,}644934;$$

er ist einschließlich der letzten Stelle richtig. Benutzt man die von EULER erst in Abhandlung 41 (siehe S. XXII der vorliegenden Übersicht) bewiesene Gleichung $s_2 =$ so besagt (9), daß die Potenzreihe $\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2}$ für $x = \frac{1}{2}$ den Wert $\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$ annim hierauf ist EULER in späteren Arbeiten mehrfach zurückgekommen (siehe insbesondere E *Opera omnia* I$_{16}$*, p. 118).

Eine von der soeben besprochenen ganz verschiedene Berechnung der Reihe $s_2 = \sum_1^\infty$ ebenfalls auf 6 Stellen, von denen aber 2 falsch sind, findet sich in der Abhandlung 4

Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi

(*Opera omnia* I$_{14}$, p. 101—107), die am 9. Juni 1735 der Petersburger Akademie vorge wurde. Die Berechnung von s_2 ist dort ein Beispiel für die Anwendung einer von Eu gefundenen Formel mechanischer Quadratur, die eine Verbesserung der Sehnentrapezmeth ist. Letztere ist identisch mit folgender Näherungsformel

$$(10) \qquad f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \int_1^{n+1} f(x)\,dx + \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n+1)}{2}.$$

EULER verbessert unter der Voraussetzung $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ diese Näherung, dem er rechts noch die Glieder

$$(11) \qquad \frac{f(1) - f(2)}{12} - \frac{f(n+1) - f(n+2)}{12}$$

hinzufügt, und verwendet sie (ähnlich wie seine Summenformel) nicht sowohl, um da (10) rechts stehende Integral wie vielmehr um die links stehende Summe zu berech

1) Schon vorher hatte JAMES STIRLING 9 Stellen dieses Reihenwertes, wovon 8 richtig mittels einer geistreichen Reihentransformation berechnet: *Methodus differentialis sive trac de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London 1730, p. 29. In dieser Schrift we auch ähnliche Interpolationsaufgaben gelöst wie in den EULERschen Abhandlungen 19 un (I$_{14}$, p. 1 und 25).

Steht links eine unendliche Reihe, so kommt natürlich nur das erste

tionsglieder (11) in Betracht. Im Falle der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ berechnet Eu

liche Summe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} = 1{,}549768$$

und dann mit $f(\nu) = \frac{1}{(10+\nu)^2}$ nach (10), (11) näherungsweise den Rest

$$\frac{1}{11} + \frac{7}{12}\,\frac{1}{121} - \frac{1}{12\cdot 144}.$$

Als weiteres Beispiel gibt EULER die ganz entsprechend durchgefü

endlichen Summe $\sum_1^{1\,000\,000} \frac{1}{\nu}$, für die er den Wert 14,392669 findet.

Eine dritte von den beiden erwähnten völlig verschiedene Berec

summe $s_2 = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ findet man in der Abhandlung 47

Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino genera

(*Opera omnia* I_{14}, p. 108—123), die am 13. Oktober 1735 der Petersbu

gelegt wurde. In dieser gibt EULER zuerst eine formale Herleitung sei

lung 25 ohne Beweis mitgeteilten Summenformel. Er bedient sich zu

TAYLORschen Reihe, die er unter Erwähnung TAYLORS und seiner *Meth*

durch Differenzenbildung gewinnt. Seine Schlußformel ist

$$S = \int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{dX}{2\cdot 3!\,dx} - \frac{d^3X}{6\cdot 5!\,dx^3} + \frac{d^5X}{6\cdot 7!\,dx^5} - \frac{3\,d^7X}{10\cdot 9!\,d\ldots}$$

(12)

$$- \frac{691\,d^{11}X}{210\cdot 13!\,dx^{11}} + \frac{35\,d^{13}X}{2\cdot 15!\,dx^{13}} - \frac{3617\,d^{15}X}{30\cdot 17!\,dx^{15}} + \cdots$$

die in die Formel (2) von S. IX, abgesehen von dem bei EULER stets

übergeht, wenn man $X = f(x)$ mit $x = a + nh$ und $h = 1$ setzt, unte

Summe $f(a) + f(a+1) + \cdots + f(a+n)$ versteht und in (12) für die

unteren Grenze a herrührenden Glieder eine passende Konstante hinzud

Für die Koeffizienten werden die nämlichen Formeln angegeben

lung 25; vgl. S. XVI und nachher (16). Den Zusammenhang mit den

NOULLIS erkennt EULER noch nicht. Es ist sogar zu vermuten, daß ih

in Basel erschienene *ars coniectandi* nicht bekannt war. Denn als erste

mmenformel leitet er, ohne JAKOB BERNOULLI zu erwähnen, die sogenannten BERNOULLIschen Polynome ab:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1} + \binom{n+1}{1} B_1 x^n + \binom{n+1}{2} B_2 x^{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n x\right]$$

symbolisch geschrieben

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}[(x+B)^{n+1} - B^{n+1}],$$

ch die im Falle eines ganzzahligen positiven x die Summen

$$0^n + 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (x-1)^n \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

gestellt werden.[1]) Bei EULER finden sich die BERNOULLIschen Polynome nicht in der emeinen Form (13), sondern mit ihren Zahlenkoeffizienten ausgeschrieben für $n = 1, 2, \ldots, 16$. $x = 1$ geht (14) in die von EULER immer wieder benutzte, aber im Grunde schon OB BERNOULLI[2]) und A. DE MOIVRE[3]) bekannte Rekursionsformel für die in der Summformel auftretenden Koeffizienten über

$$1 + \binom{n+1}{1} B_1 + \binom{n+1}{2} B_2 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0,$$

symbolisch geschrieben

a) $$(B+1)^{n+1} - B^{n+1} = 0.$$

EULER und vor ihm wird die Formel nicht allgemein, sondern nur für die ersten te von n angeschrieben, bis ihr Bildungsgesetz klar ist; auch verwendet EULER in en frühern Arbeiten nicht die BERNOULLIschen Zahlen B_ν selbst, sondern die mit ihnen ch zusammenhängenden S. XVI genannten Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$)

Als weiteres Beispiel zu seiner Summenformel behandelt EULER in der Abhandlung 47 Summe

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

findet

$$S = \text{Const.} + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6}$$

$$+ \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \text{etc.}$$

---

1) Ersetzt man in Formel (2) von S. XVI $f(a)$ durch a^n, a durch 0, h durch 1, n durch x, sofort sie den Ausdruck der Summe (15) durch die Funktion (13).

2) *Ars coniectandi*, Basel 1713, p. 97, 98. Daselbst auch Formel (13) allgemein und noch nders für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

3) *Miscellanea analytica*, London 1730, *Complementum* S. 19.

geübten Rechners von der rechts stehenden divergenten Reihe so viele Glieder
gerade für einen guten Näherungswert nötig sind; er erwähnt ausdrücklich (
Falle $x = 1$), daß die Reihe nicht konvergent ist. (Definiert hatte EULER j
schon in der Abhandlung 20, über die S. XLV berichtet werden wird.) Es fol
handlung 47 noch die vorhin erwähnte dritte Berechnung der Reihe

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

von der 10 Glieder addiert werden und der Rest mittels der Summenformel abg

Das Ergebnis wird auf 20 Stellen genau angegeben, d. h. viel genauer,
gebene Rechnung es liefern konnte. Daraus darf man schließen, daß die Übe
mit $\frac{\pi^2}{6}$ EULER aufgefallen war, als er die Abhandlung 47 abfaßte.[2]) Bekan
erst in der Abhandlung 41, die $7^1/_2$ Wochen später als 47 der Petersburger A
gelegt worden ist. Gegen Schluß der Abhandlung 47 werden noch die Zahlenwe
Reihen $s_3 = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^3}$ und $s_4 = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^4}$ auf 15 Stellen (die alle bis auf die 3 l
richtig sind) mitgeteilt.

Die soeben genannte Abhandlung 41

De summis serierum reciprocarum

(*Opera omnia* I_{14}, p. 73—86) wird für die Geschichte der Mathematik merkw
als die, in der EULER den Lehrsatz, daß die Reihen

(8) $$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

für gerades n (>0) zu π^n in einem rationalen Verhältnis

(19) $$a_{2k} = \frac{s_{2k}}{\pi^{2k}}$$

(vgl. S. IX (3)) stehen, zum ersten Male veröffentlicht hat, und zwar mit ei
der zwar keinenfalls allen Anforderungen an Strenge (auch nicht denen der da

1) Sie sind alle richtig; der Wert, den EULER an späteren Stellen seiner W
ist gewöhnlich in der 16. Stelle falsch. Vgl. I_{16}, p. 115, Anmerkung.

2) Ob ihm diese Übereinstimmung schon bei Berechnung von s_2 in den Abh
und 25 aufgefallen war, ist zweifelhaft, zumal der in 25 mitgeteilte Wert in der 5.
falsch ist.

S. XXVI) entsprach, der aber leicht zu einem strengen ausgebaut werden konnte, was er im wesentlichen von EULER selbst geschehen ist (vgl. S. XXXII–XXXVII). Außerzeigte EULER in der Abhandlung 41, daß die Reihen

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdots$$

ungerades $n = 2k+1$ zu π^n in rationalem Verhältnis

$$b_{2k+1} = \frac{\sigma_{2k+1}}{\pi^{2k+1}}$$

en, und zwar ist

$$\sigma_{2k+1} = (-1)^k \frac{E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!} \pi^{2k+1},$$

die E_{2k} ganze Zahlen sind:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad \ldots$$

nennt die E_i EULERsche Zahlen und setzt noch $E_1 = E_3 = E_5 = \cdots = 0$. Die EULER-n Zahlen kann man aus den Rekursionsformeln

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

hnen, die sich sofort aus der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu}$$

en.[1]) Die Reihen

$$t_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots$$

en eng mit den Reihen s_n zusammen, da offenbar

$$s_n = t_n + \frac{1}{2^n} s_n, \quad \text{also} \quad t_n = \frac{2^n - 1}{2^n} s_n, \quad s_n = \frac{2^n}{2^n - 1} t_n$$

Es ist also nach Gleichung (3) von S. IX

$$t_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} - 1}{2 \cdot (2k)!} \pi^{2k} B_{2k}.$$

R betrachtet in der Abhandlung 41 (indem er sich wegen der s_n auf den soeben fest-

1) Vgl. E 130, *Opera omnia* I14, insbesondere p. 428; in E 41 kommen nur die gleich- die BERNOULLIschen und die EULERschen Zahlen enthaltenden Rekursionsformeln vor, von S. XXV die Rede ist.

(28) $$\tau_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \cdots$$

zu Grunde legt, aus der

(29) $$\tau_{2n+1} = \sigma_{2n+1}, \quad \tau_{2n} = l_{2n}$$

folgt.

Bei seinen Überlegungen, deren Ziel die Bestimmung der rati

(30) $$d_n = \frac{\tau_n}{\pi^n}$$

(also schließlich

(31) $$d_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}-1}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}, \quad d_{2k+1} = (-1)^k \frac{E}{2^{2k+}}$$

ist, geht er davon aus, daß man durch die Koeffizienten eines Poly

(32) $$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

mit den Nullstellen x_ν die Potenzsummen

(33) $$S_1 = \sum \frac{1}{x_\nu}, \quad S_2 = \sum \frac{1}{x_\nu^2}, \quad S_3 = \sum \frac{1}{x_\nu^3}$$

in bekannter Weise ausdrückt[1]):

(34) $$S_1 = -c_1, \quad S_2 = -c_1 S_1 - 2c_2, \quad S_3 = -c_1 S_2 - c_2 S$$

Euler nimmt dieses Verfahren auch dann in Anspruch, wenn (32) e
reihe ist, und schließt beispielsweise so:

Die Funktion

(35) $$1 - \frac{\sin x}{\sin \alpha} = 1 - \frac{x}{1!\sin\alpha} + \frac{x^3}{3!\sin\alpha} - \frac{x^5}{5!\sin\alpha} + \cdots$$

hat die Nullstellen[2])

(36) $$x_{2\nu} = \alpha + 2\nu\pi, \quad x_{2\nu+1} = \pi - \alpha + 2\nu\pi \quad (\nu$$

also ist

(37) $$1 - \frac{x}{1!\sin\alpha} + \frac{x^3}{3!\sin\alpha} - \frac{x^5}{5!\sin\alpha} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi-\alpha}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi+\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi+\alpha}\right)\left(1 + \right.$$

---

1) Wegen der Entdeckungsgeschichte dieser sog. Girard-Newton
Anmerkung zu S. 178 von I_8.

2) Euler schreibt in der Abhandlung 41 noch p für π; vgl. die An

l nach (34):

$$S_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi - \alpha} + \frac{1}{-\pi - \alpha} + \frac{1}{2\pi + \alpha} + \frac{1}{-2\pi + \alpha} + \cdots = \frac{1}{\sin\alpha},$$

$$) \quad S_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\pi - \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(2\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(-2\pi + \alpha)^2} + \cdots = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$S_3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(\pi - \alpha)^3} + \frac{1}{(-\pi - \alpha)^3} + \frac{1}{(2\pi + \alpha)^3} + \frac{1}{(-2\pi + \alpha)^3} + \cdots = \frac{1}{\sin^3\alpha} - \frac{1}{2\sin\alpha}.$$

Für einen späteren Zweck schreiben wir die erste dieser Formeln nochmals, wobei α durch $\frac{m\pi}{n}$ ersetzen (m, n seien ganze Zahlen > 0):

$$) \qquad \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n - m} - \frac{1}{n + m} - \frac{1}{2n - m} + \frac{1}{2n + m} + \cdots$$

Wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, werden die rechten Seiten der Gleichungen (38) rationale len; die Reihen (38) aber für die S_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) werden gleich

$$) \qquad \frac{2}{\pi^\nu}\left(\frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{(-3)^\nu} + \frac{1}{5^\nu} + \frac{1}{(-7)^\nu} + \cdots\right) = \frac{2\tau_\nu}{\pi^\nu} = 2d_\nu \ (\text{vgl. } (30)),$$

l die Formeln (34) liefern, wenn man für $S_1, S_2, S_3, \ldots$ diese Werte $2d_1, 2d_2, 2d_3, \ldots$ setzt, Rekursionsformeln für diese Koeffizienten, d. h. also (vgl. (31)) gemischte Rekur nsformeln für die EULERschen und die BERNOULLIschen Zahlen. EULER berechnet die len d_n für $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$.

Indem er $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ wählt, findet er weitere Rei-, wie

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots,$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

ı.; er bemerkt, daß die erste dieser Reihen sich schon bei NEWTON findet.[1])

Gegen Schluß der Abhandlung benutzt er an Stelle von (37) den Ansatz

$$) \qquad \frac{\sin x}{x} = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right),$$

die Reihen s_{2k} nochmals und ohne Berufung auf ihren Zusammenhang mit den t_{2k} $2k = 12$) zu summieren.

---

1) Siehe I14, S. 82, Anmerkung.

Die Entdeckung

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

hatte EULER vor Drucklegung der Abhandlung 41 in einem nicht meh
DANIEL BERNOULLI mitgeteilt, der sie an seinen Vater JOHANN B
Dieser fand daraufhin, genau wie EULER, mittels der Reihe für $\frac{\sin x}{x}$ di
öffentlichte sie später (ohne EULER zu nennen) im vierten Bande se
In einem Briefe[2]) teilte er EULER am 2. April 1737 seine Herleitu
gleichzeitig Bedenken gegen deren Beweiskraft: man hätte vor allem b
die Funktion $\sin x$ keine imaginären Nullstellen hat. Später (nach den
handlung 41) griff DANIEL BERNOULLI die Beweisführung EULERS no
dem er erklärte, es sei grundsätzlich nicht erlaubt, mit Potenzreihen
zu rechnen; auf EULERS Weise könne man ebensogut beweisen, daß $\sum$
sei, sondern gleich $\frac{m^2 S^2}{6 n^4}$, wenn S der Umfang, m, n die Längen der gr
Achse irgendeiner Ellipse sind.[4])

Den Einwürfen trug EULER Rechnung in den Abhandlungen 63
Reihenfolge abgefaßt, in der umgekehrten aber gedruckt worden sind.

---

1) JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia*, t. 4, Lausannae et Genevae 17

2) Vgl. die schon S. XVII erwähnte Abhandlung P. STÄCKELS in Ba

3) *Correspondance math. et phys.* II, p. 477; vgl. auch die in der vo
nannte Abhandlung STÄCKELS I$_{11}$, S. 169.

4) Fällt nämlich die große Achse der Ellipse in die X-, die kleine in
ihre Bogenlänge, vom Punkt $x = \frac{m}{2}$, $y = 0$ ab bis zu einem willkürlich
so findet man nach einfacher Rechnung (bei passender Wahl des Vorzeichen
reihe von s:

$$y = s - \frac{2 m^2}{3 n^4} s^3 + \cdots$$

Dann kann man nach EULER so weiterschließen: Die Funktion $y:s$ hat d

$$s = \frac{\nu S}{2} \qquad (\nu =$$

es ist also

$$1 - \frac{2 m^2}{3 n^4} s^2 + \cdots = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{4 s^2}{\nu^2 S^2}\right)$$

und daher

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{m^2 S^2}{6 n^4}.$$

gabe von ganz verschiedenen Seiten an und haben fast nichts miteinander gemein. Vo diesen beiden entstanden, aber nach ihnen veröffentlicht ist die ebenfalls hierher gehörig Abhandlung 130. Ehe wir über diese drei Abhandlungen, deren jede in ihrer Art bedenter ist, berichten (und zwar in der Reihenfolge 130, 61, 63), gehen wir kurz auf den Inha der ihnen vorausgehenden Abhandlung 55 ein, sowie auf den einiger späterer Abhandlunge (617, 642, 746), die ebenso wie 55 vorzugsweise der Summenformel und nicht den Reihe s_{2n} gewidmet sind.

Die beiden Abhandlungen 55

Methodus series summandi ulterius promota

und 617

De summatione serierum, in quibus terminorum signa alternantur

(*Opera omnia* I_{14}, p. 124—137 und I_{16}, p. 47—78), die in einem Abstand von fast 40 Jahre am 17. September 1736 und am 22. Februar 1776 der Petersburger Akademie vorgeleg worden sind, dehnen die Summenformel auf endliche und unendliche Reihen mit abwechseln den Vorzeichen

$$f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - f(a+3h) + f(a+4h) - \cdots \tag{42}$$

aus; vgl. die Herleitung S. X; EULER gibt sie in der im fünften Abschnitt dieses Bericht zu besprechenden Abhandlung 352, während er in 55 und 617 genau wie bei der erste Summenformel den TAYLORschen Lehrsatz benutzt.

Außerdem gibt er in 55 und 617 noch eine Summenformel oder vielmehr eine Un formung für Potenzreihen

$$f(0) + f(1)\xi + f(2)\xi^2 + f(3)\xi^3 + \cdots \tag{43}$$

Er entwickelt jeden Koeffizienten $f(\nu)$ nach Potenzen von ν:

$$f(\nu) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\nu + \frac{f''(0)}{2!}\nu^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\nu^3 + \cdots$$

und erhält (43) in der Form

$$\begin{aligned} &f(0)(1+\xi+\xi^2+\cdots) + \frac{f'(0)}{1}(\xi+2\xi^2+3\xi^3+\cdots) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\xi+2^n\xi^2+3^n\xi^3+\cdots) + \cdots \\ &= \frac{f(0)}{1-\xi} + \frac{f'(0)\xi}{(1-\xi)^2} + \frac{f''(0)(\xi^2+\xi)}{2!(1-\xi)^3} + \frac{f'''(0)(\xi^3+4\xi^2+\xi)}{3!(1-\xi)^4} + \cdots \end{aligned} \tag{43a}$$

Diese Umformung von (43) ist richtig, wenn $f(\nu)$ eine ganze rationale oder eine noch ge wissen Einschränkungen genügende ganze transzendente Funktion ist; es ergibt sich dan auf der rechten Seite von (43a) eine ganze Funktion von $\frac{1}{1-\xi}$. EULER fügt auf der rechte Seite von (43a) noch überflüssiger Weise + Const. hinzu.

Die Summenformel, die EULER für (42) gewinnt, stimmt unter Weglassung des Restgliede mit (2a) S. X überein. Für die auftretenden mit den BERNOULLIschen Zahlen verwandter

auf den Endwert $b = \infty$ bezieht, und faßt das Weggelassene in eine nicht näher
Konstante zusammen, die manchmal ohne rechte Begründung gleich Null angen

So findet er z. B.[1]) in der vorhin erwähnten, im übrigen aber erst sp
sprechenden Abhandlung 352 im Falle $f(a + \nu h) = (a + \nu h)^m$

$$a^m - (a+h)^m + (a+2h)^m - (a+3h)^m + \cdots$$

$$= \frac{a^m}{2} - \frac{B_2 h(2^2-1) m a^{m-1}}{2!} - \frac{B_4 h^3 (2^4-1) m(m-1)(m-2) a^{m-3}}{4!}$$

$$\frac{B_6 h^5 (2^6-1) m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) a^{m-5}}{6!} - \cdots \quad \frac{B_{m+1} h^m (2^m}{m+}$$

und daraus für $a = 0$, $h = 1$

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m - \cdots = -\frac{B_{m+1}(2^{m+1}-1)}{m+1}$$

in Übereinstimmung mit (10) S. XIII trotz der Fragwürdigkeit der vorstehende

Die Abhandlung 642 vom 18. März 1776

De singulari ratione differentiandi et integrandi, quae in summis serierum

(*Opera omnia* I_{16}, p. 122—138) enthält nichts grundsätzlich Neues. Es wird ge
schon auf S. XXI dieser Übersicht erwähnten Polynome $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades
Gleichung

$$\frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx} = n\,\varphi_n(x)$$

genügen. (Jakob Bernoulli, den Euler auch hier nicht erwähnt, hat diese Gle
ausdrücklich aufgestellt.) Dann wird noch formal gezeigt, wie aus der Summ
die Funktion $f(x)$ die Summenformeln für die Funktionen $f'(x)$ und $\int f(x)\,dx$

Die Abhandlung 746 endlich vom 13. März 1780

Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales i

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 200—213) gibt einen Überblick über Eulers frühere Er
sichtlich seiner Summenformel in ihrem Zusammenhang mit den Bernoulli
und den Reihensummen s_{2k}.

Nunmehr besprechen wir die schon S. XXVI/XXVII hervorgehobenen A
130, 61, 63, die zu Eulers wichtigsten über die Reihen s_n gehören.

---

1) E 352, § 7; *Opera omnia* I_{15}, p. 76.

(*Opera omnia* I_{14}, p. 407—462) bildet eine Fortsetzung und Ergänzung der besprochene Abhandlung 41, der gegenüber sie zwar nicht hinsichtlich der Strenge, wohl aber im Fo malen und in der Darstellung einen erheblichen Fortschritt bedeutet.

EULER geht wieder aus von der allgemeinen Gleichung (vgl. (32))

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right) \tag{44}$$

und von dem besonderen Falle (37) mit den dort daraus gezogenen Folgerungen, bemerk aber dann folgendes: Wenn die Funktion (44) mit $f(x)$ bezeichnet und $f'(x):f(x)$ in ein Potenzreihe entwickelt wird:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x - x_\nu} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots, \tag{45}$$

so ist

$$k_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(-x_\nu)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{46}$$

Wieder wird wie in E 41 die Anwendung auf $f(x) = 1 - \sin x : \sin \alpha$ oder, da es bei de logarithmischen Differentiation auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, a $f(x) = \sin x - \sin \alpha$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\sin x - \sin \alpha} \tag{47}$$

gemacht. Die Nullstellen x_ν des Nenners sind bekannt, vgl. (36). Für $\alpha = 0$, $x_\nu = 0, \pm$ $\pm 2\pi, \ldots$ ergibt sich ihm so aus (47) die Partialbruchreihe der Funktion $\cot x$[1]), für $x =$ dagegen die Partialbruchreihe (38) für $\frac{1}{\sin \alpha}$, und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält EULER

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{x - \frac{4\nu+1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{4\nu+3}{2}\pi}\right) = \sum_{0}^{\infty} k_\nu x^\nu \tag{48}$$

1) Damit beantwortet sich die von P. STÄCKEL in der S. XVII angeführten Abhandlun (*Opera omnia* I_{14}, S. 172) aufgeworfene Frage, wo sich dieser auf logarithmischer Differentiatio beruhende Beweis zuerst gedruckt finde. Brieflich hatte ihn NIKOLAUS BERNOULLI am 13. Juli 174 an EULER mitgeteilt (*Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St. Pétersbourg 184 t. II, p. 688); die Abhandlung 130, die den obigen von dem N. BERNOULLIS nur unbedeuten abweichenden EULERschen Beweis enthält, war damals schon geschrieben, aber noch nicht gedruck

womit die Formeln (40) von S. XXV wiedergewonnen sind, sobald die ... kannt sind. Für diese aber ergeben sich die linearen, schon aus E 4... sionsformeln (vgl. (34)) aus der Identität

$$-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots\right)=\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+-\cdots\right)(-1+k_1x\ldots$$

während die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1+s^2}{2}, \tag{49}$$

der die Funktion $s=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ genügt, Rekursionsformeln liefert, we... zweiten Grade enthalten.

Durch Umformung und Verallgemeinerung der gefundenen Partia... es EULER leicht, die acht Reihen (*Opera omnia* I$_{14}$, S. 424)

$$\begin{array}{llll} \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{x^2-\nu^2}, & \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{x^2-\nu^2}, & \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{x^2+\nu^2}, & \sum_1^\infty{}_\nu \ldots \\ \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{x^2-(2\nu)^2}, & \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{x^2+(2\nu)^2}, & \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{x^2-(2\nu-1)^2}, & \sum_1^\infty{}_\nu \ldots \end{array} \tag{50}$$

durch trigonometrische und Exponentialfunktionen zu summieren.

Nachdem er beispielsweise für die erste dieser Reihen die Summe...

$$-\frac{1}{2x^2}+\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}$$

gefunden hat, gewinnt er die (mit (-1) multiplizierte) dritte, indem er ...

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi(e^{2\pi x}+1)}{2x(e^{2\pi x}-1)}.$$

Dies ist die früheste Stelle, wenn man den Tag der Mitteilung in der ... den des Drucks als entscheidend ansieht, wo durch Vermittlung des ... sammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrisch... vgl. S. XXXV dieses Berichts.

Übersichtlich und verhältnismäßig vollständig werden die Poten... BERNOULLIschen und die EULERschen Zahlen enthalten, im Zusammenh...

hrschreiben für die nämlichen Funktionen auch in der *Introductio* zusammengestellt (*Opera omnia* I8), die 1748, also zwischen der Mitteilung (1739) und der Drucklegung (1750) von 130 erschienen ist.

Im übrigen enthält diese Abhandlung außer dem schon Berichteten noch manches Bemerkenswerte: z. B. erzeugende Funktion und Rekursionsformeln für die EULERschen Zahlen ohne Verbindung mit den BERNOULLIschen.[1]) Ferner erkennt EULER, daß die Koeffizienten, die bei seiner Summenformel auftreten, die nämlichen sind wie die, die bei der Berechnung der Reihensummen s_{2k} sich ergeben, ohne freilich zu bemerken, daß diese Koeffizienten schon bei JAKOB BERNOULLI vorkommen; sodann gibt er für diese BERNOULLIschen Zahlen die erzeugende Funktion

(51)
$$s = \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

an, die sich nur im Vorzeichen von z von der jetzt gewöhnlich verwendeten Funktion unterscheidet, und aus der sich die linearen Rekursionsformeln für die BERNOULLIschen Zahlen (vgl. (16), S. XXI) besonders einfach ergeben. Aus der Differentialgleichung, der s genügt,

(52)
$$z\frac{ds}{dz} - s - sz + s^2 = 0$$

gewinnt er Rekursionsformeln, die von der zweiten Ordnung in den BERNOULLIschen Zahlen sind.

Nachdem EULER der große Erfolg bei der Summation der Reihen

$$s_{2k} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2k}}$$

beschieden war, mußten ihn auch die Reihen

$$s_{2k+1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2k+1}}$$

reizen. Er berechnete in der Abhandlung 130 deren Werte bis $k = 5$ zunächst zahlenmäßig und bildete die Verhältniszahlen der Reihensummen zu π^{2k+1}, wobei sich keine als rational erkennbare Werte ergaben. Dann versuchte EULER den Reihen s_{2k+1}, insbesondere der Reihe s_3 oder vielmehr (was auf dasselbe hinausläuft) der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots$$

durch Umformung beizukommen. Wenn er die Verfolgung dieses Zieles auch schließlich

1) Vgl. die Anmerkung auf S. XXIII.

aufgab (auch kein späterer Mathematiker hat es erreicht trotz vieler gemachter B
so ist in EULERS vergeblichen Versuchen doch so viel von einem hohen Forsc
halten, daß die diesen Versuchen gewidmeten letzten Seiten der Abhandlung
S. 440—462) auch heute noch lesbar bleiben. Es finden sich dort u. a. auc
noch unvollkommenen Ansätze für die Funktionalgleichung der RIEMANNschen Z
die dann später in den noch zu erwähnenden Abhandlungen 352 und 432[1])
weiter geführt wurden; so gibt EULER z. B. Formeln wie diese

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right),$$

$$1-2^3+3^3-4^3+\cdots=-\frac{1}{8}=\frac{-2\cdot 3!}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right),$$

$$1-2^5+3^5-4^5+\cdots=\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 5!}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots\right).$$

Auch später hat EULER mit Aufwand von viel Mühe und Scharfsinn ver
sucht, die Zahlenwerte der Reihen s_{2k+1} zu klären, insbesondere in den soebe
Abhandlungen 352 und 432, die wohl diesem Versuch ihre Entstehung verdank

Den Einwänden, die gegen die Abhandlung 41 erhoben worden waren u
gegen die soeben besprochene Abhandlung 130 in Kraft bleiben, begegnete
Erfolg in der Abhandlung 61

*De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortaru
altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantu*

(*Opera omnia* I14, p. 138—155), die er zugleich mit sechs anderen Arbeiten (E
62, 83, 284) am 6. September 1742 der Berliner Akademie vorlegte.[2])

Bei der Inhaltsangabe dieser Abhandlung 61 müssen wir, um den Zusamm
Beweise herzustellen, auch auf den Inhalt der soeben genannten Abhandlungen
eingehen, sowie auf den der früher entstandenen, aber erst später, 1748, der
Akademie vorgelegten und 1750 gedruckten Abhandlung 162. Diese drei A
59, 60, 162

---

1) *Opera omnia* I15, p. 70 und 131.

2) EULER, der im Juni 1727 einen Monat vor Vollendung seines 20. Leben
Rußland gekommen war, war nach 14jährigem Aufenthalt im Juni 1741 nach E
brochen, von wo er nach 25 Jahren (im Juni 1766) wieder nach Petersburg zurück
lebte er noch bis zum 7. September 1783.

Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli.

De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur,

Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes

eröffnen den Band I_{17} (p. 1—34, 35—69, 70—148).

Die Abhandlung 59 knüpft an 41 und 130 an: EULER erkennt, daß man die rech[te] Seite der Formel (39) von S. XXV auch erhält, wenn man

$$\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n} \tag{53}$$

nach Potenzen von x entwickelt und die entstandene Reihe gliedweise zwischen den Grenz[en] $x=0$ und $x=1$ integriert:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}}. \tag{54}$$

Dieser Gleichung stellt er in E 59 noch eine zweite ähnliche an die Seite:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}, \tag{55}$$

die er mit den nämlichen Überlegungen wie (54) ableitet: er geht (vgl. S. XXIV (35), (37)) von der Gleichung

$$\begin{aligned}\cos x - \cot\alpha\sin x &= 1 - \frac{x\cot\alpha}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3\cot\alpha}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5\cot\alpha}{5!} + \cdots\\ &= \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha-2\pi}\right)\cdots\end{aligned} \tag{56}$$

aus und gewinnt durch Vergleichung der Koeffizienten von x auf beiden Seiten die Parti[al]bruchreihe[1])

$$\cot\alpha = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\pi}+\frac{1}{\alpha-\pi}+\frac{1}{\alpha+2\pi}+\frac{1}{\alpha-2\pi}+\cdots, \tag{57}$$

1) Genau so verfährt auch EULER in der *Introductio*; im Grunde ist dieser Beweis v[on] dem auf logarithmischer Differentiation der Sinusfunktion beruhenden nicht allzusehr verschiede[n], denn der Übergang von (56) zu (57) geschieht durch

$$\lim_{x\to 0}(\cos x - \cot\alpha\sin x - 1)\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha-x)-\sin\alpha}{x\sin\alpha} = -\frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{d\sin\alpha}{d\alpha}.$$

die für $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ in folgende übergeht:

$$\frac{\pi}{n} \cot \frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m-2n} + \cdots. \tag{58}$$

Hieraus folgt (55) wie (54) aus (39).

Den hier mitgeteilten Ansatz (56) für die Gleichung (57) hatte EULER schon Abhandlung 130 gemacht, dort aber nicht weiter verfolgt, da er dort das auf mische Differentiation der Sinusfunktion hinauslaufende Verfahren bevorzugte.

Die gewonnenen Formeln (54), (55) mußten EULER zum Versuch einer zwe leitung mittels unbestimmter Integration und Einsetzen der Grenzen reizen; dazu er die Nullstellen der Funktionen $x^n \pm 1$. Hier setzt Abhandlung *162 ein, in der* nome $x^n \pm a^n$ (und allgemeinere) in ihre Faktoren und die rationalen Funktionen

$$\frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1 \pm x^n} \tag{59}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, worauf unbestimmt integriert wird. Die Werte stimmten Integrale mit den Grenzen 0 und 1, d. h. die Formeln (54), (55), werden E 60 angegeben.

In der uns beschäftigenden Abhandlung 61 des Bandes I₁₄ benutzt EULER die der Nullstellen des Polynoms $x^n - a^n$, um die Funktion

$$\frac{\left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2x\sqrt{-1}} \tag{60}$$

(deren Grad m für ungerades n gleich $n-1$, für gerades n gleich $n-2$ ist), als reeller Faktoren zweiten Grades darzustellen:

$$\prod_{1}^{\frac{m}{2}} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) \cos \frac{2\nu\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\nu\pi}{n}}, \tag{61}$$

und erhält dann durch den Grenzübergang $n \to \infty$

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2 \pi^2}\right). \tag{41}$$

Bei Gelegenheit dieser Ableitung des Sinus-Produktes[1]), die ohne Schwierigke streng gemacht werden kann, hat EULER zum ersten Male die berühmten nach

1) Im neunten Kapitel der *Introductio* (I₈, p. 153) werden auf die nämliche Art unendlichen Produkte für $e^x - 1$, $e^x - e^{-x}$, $\cos x$ u. a. hergeleitet.

nannten Formeln

$$(62)\qquad \sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$$

veröffentlicht; zuvor hatte er an CHR. GOLDBACH in zwei Briefen vom 9. Dezember 17 und vom 8. Mai 1742 in etwas anderer Form gleichbedeutende Formeln mitgeteilt.[1])

Nachdem EULER in E 61 auf die angegebene Weise die Herleitung des Sinusprodukt und damit die der Reihenwerte s_{2k} in Ordnung gebracht hatte, fügte er den in der Üb schrift dieser Abhandlung angezeigten zweiten Beweis für den Zusammenhang dieser Reihe werte mit π^{2k} an.[2]) Er geht dabei von den Gleichungen (54), (55) aus und setzt vora daß sie auf dem Wege über das unbestimmte Integral gewonnen wurden. Zunächst bemer er, daß aus Stetigkeitsgründen aus ihnen die für jedes s (nicht nur für $s=\frac{m}{n}$, wie z nächst gezeigt worden war) richtigen Gleichungen folgen:

$$(63)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \frac{1}{3+s} - \cdots$$

$$(64)\qquad \pi \cot \pi s = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s} - \cdots$$

Durch fortgesetzte Differentiation dieser Gleichungen und Einsetzen des Wert $s=\frac{1}{2}$ findet EULER die sämtlichen Werte s_{2k}, σ_{2k+1} (vgl. S. XXV (38)). So liefert z. B. d durch Differentiation aus (64) entstehende Gleichung

$$(65)\qquad \frac{-\pi^2}{\sin^2 \pi s} = -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \cdots\right)$$

für $s=\frac{1}{2}$ die Reihensumme

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Noch viele andere Reihen werden durch Einsetzen besonderer Werte für s summiert, z.

$$(66)\qquad \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \cdots;$$

diese Reihe erhält man, wenn man (63) differenziert und dann $s=\frac{1}{4}$ einsetzt.

---

1) Vgl. die Anmerkungen zu I_{14}, S. 142 und I_8, S. 147, wie auch S. XXX der vorliegend Übersicht.

2) Der zweite Beweis stimmt allerdings auf seinem letzten Stück mit dem ersten übere da beide die Partialbruchreihen für die trigonometrischen Funktionen verwenden. Aber die ge nene Ableitung dieser Partialbruchreihen rechtfertigt es, von einer zweiten Herleitung der Reil s_{2k} zu sprechen.

Démonstration de la somme de cette suite

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

(*Opera omnia* I_{14}, p. 177—186). Sie ist im Jahre 1743, also früher als 61 erschie zwar in dem von EULER sonst nie zu Veröffentlichungen benutzten *Journal littérai maque, de Suisse et du Nord*[1]), und wurde, nachdem sie lange verschollen war, von PAUL STÄCKEL wieder ans Licht gezogen; vgl. dessen in I_{14}, S. 156—176 w gedruckten Einführungsaufsatz. Sie enthält für den Summenwert $\frac{\pi^2}{6}$ der in der Ü genannten Reihe zwei neue Ableitungen (also die dritte und vierte unserer Auf doch glückte es nicht, das benutzte Summierungsverfahren auf die Reihen $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k}}$ $k>1$ auszudehnen. EULER ist auf die Beweise dieser Arbeit später niemals meh gekommen, während er seine anderen Beweise für die Gleichungen $s_{2n}=a_{2n}\pi^{2n}$ maliger Wiederholung veröffentlichte. In der Abhandlung 63 geht EULER aus von der

$$(67)\qquad \frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\int_0^x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^x\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Er setzt $x=1$ und integriert rechts gliedweise, so findet er seinen dritten Bewe Gleichung

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

Der dann folgende vierte Beweis ist dem dritten ähnlich: EULER leitet mit de der unbestimmten Koeffizienten die Reihe[2])

$$(68)\qquad \frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{6}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\frac{x^8}{8}+\cdots$$

als Lösung der Differentialgleichung

$$(69)\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-1=0$$

1) Die Abhandlung 63 und die in den *Mémoires de l'académie des sciences de* schienene Abhandlung 352 (I_{15}, p. 70) sind die einzigen der Bände I_{14-16^*}, die in fr Sprache abgefaßt sind; alle anderen sind lateinisch geschrieben. Diese beiden sind auch mit der Abhandlung 61, die in den *Miscellanea Berolinensia* erschienen ist, die ein nicht in Petersburg gedruckt worden sind.

2) Über die Entdeckungsgeschichte dieser Reihe siehe I_{14}, S. 165.

ab. Aus (68) folgt dann

$$(70)\qquad \frac{1}{6}(\arcsin x)^3 = \int_0^x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\,\frac{x^4}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,\frac{x^6}{6} + \cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und nach gliedweiser Integration für $x = 1$:

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right),$$

d. h.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Den Schluß der Abhandlung 63 bildet eine Zusammenstellung der Reihensumme $s_{2n} = \alpha_{2n}\pi^{2n}$ bis $n = 13$, wobei in den Faktoren α_{2n} [1]) die BERNOULLIschen Zahlen eige abgespalten werden, ohne daß diese Bezeichnung und ein Hinweis auf JAKOB BERNOUL vorkämen.

Es liegt nahe zu fragen, ob es außer den erwähnten EULERschen Beweisen für d Gleichung $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$ und für die allgemeinere Summation der Reihen s_{2k} noch andere gil Da ist zunächst zu bemerken, daß man die Reihenwerte s_{2k} sehr leicht gewinnt, wenn m die BERNOULLIschen Polynome (siehe S. XXI (13)) im Intervall (0,1) durch trigonometrisc Reihen darstellt. Auch dieser Ansatz geht in seinem einfachsten Falle auf EULER zurüc siehe die Abhandlung 555, I_{16}, insbesondere S. 440. [2]) Wegen der Einzelheiten dieser Abl tung der Reihenwerte s_{2k} darf auf die Lehrbücher, z. B. auf K. KNOPP, *Theorie und A wendung der unendlichen Reihen*, Leipzig 1922, S. 362 verwiesen werden. Im gleichen Buc S. 259 findet man noch einen weiteren Beweis (den sechsten unserer Zählung) für d Gleichung $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$. Die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ wird mittels der „MARKOFFschen Transformation" i

in die Reihe $\sum_1^\infty \frac{3\{(n-1)!\}^2}{(2n)!}$ verwandelt; das ist aber das Sechsfache dessen, was sich ergil

wenn man in der Reihe (68) für $(\arcsin x)^2$ für x den Wert $\frac{1}{2}$ einsetzt, wodurch m

$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$ erhält.

Ähnlich wie die S. XXVII genannten Abhandlungen 55, 617, 642, 746, die sich haup sächlich mit der Summenformel beschäftigen, bedeuten die in dieser ersten Gruppe noch z

1) Wenn EULER am Schluß der Abhandlung 63 sagt, er habe bereits zwei verschiede Methoden zur Berechnung dieser Faktoren gegeben, so meint er zweifellos die beiden Rekursion formeln, von denen S. XXXI die Rede war; die STÄCKELsche Annahme I_{14}, p. 168, Anmerkun dürfte nicht zutreffen.

2) Vgl. auch S. LIV dieses Berichts.

berichtet haben.

In der am 18. August 1768 der Petersburger Akademie vorgelegten Abha

De summis serierum numeros BERNOULLIANOS *involventium*

(*Opera omnia* I_{15}, p. 91—130) wird nochmals der Zusammenhang zwischen der E Summenformel und der Summation der Reihen $s_{2n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}}$ hergestellt durch der BERNOULLIschen Zahlen, die bis B_{34} angegeben werden (I_{15}, p. 93)[1]; hier endlich in Titel und Text auf JAKOB BERNOULLI hingewiesen. Sonst enthält lung meist Wiederholungen. So werden z. B. ausgehend von der Formel[2])

$$(71) \qquad \int_0^1 z^{m-1}(\ln z)^n = (-1)^n \frac{n!}{m^{n+1}}$$

für die Reihensummen $s_2, s_3, \ldots$ Integraldarstellungen angegeben:

$$(72) \qquad s_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \frac{(\ln z)^n}{1-z} dz$$

und entsprechend für die Teilsummen

$$(73) \qquad S_{m,n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{m^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{1-z^m}{1-z} (\ln z)^{n-1} dz.$$

EULER benutzt die rechte Seite dieser Formel, um $S_{m,n}$ auch für nicht ganzz definieren, was insbesondere für $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ zu einfachen Ergebnissen wird die EULERsche Konstante nochmals berechnet.

In der am 2. Oktober 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten, abe EULERS Tode 1785 in den *Opuscula analytica* veröffentlichten Abhandlung 597

De seriebus potestatum reciprocis methodo nova et facillima summand

(*Opera omnia* I_{15}, p. 701—722) wiederholt EULER den Inhalt früherer Abhand

1) Vorher schon *Institutiones calculi differentialis, Petropoli 1755, partis poste* *Opera omnia* I_{10}, p. 319.

2) EULER leitet sie mittels teilweiser Integration ab; noch einfacher gewinnt EULER an anderer Stelle (E 463, I_7) zeigt, durch Differentiation nach m auf beide Gleichung $\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}$.

von 61. *Im Gegensatz zu der in der Überschrift ausgesprochenen Meinung* EULERS
e Abhandlung 597 weder stofflich noch hinsichtlich des Beweisverfahrens etwas
e I_{15}, S. 712 stehende Tafel der rationalen Zahlen $a_{2n} = s_{2n} : \pi^{2n}$ bis $n = 17$ steht
E 393, und die am Schlusse der Abhandlung 597 *mitgeteilte*, auf 25—28 Stellen
'afel der Werte $\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$, war schon in der Abhandlung 128 (vgl. S. LVII) veröffent-
len.

ler am 3. Oktober 1776 vorgelegten Abhandlung 664

Exercitatio analytica

mia I_{16}, p. 235—240) wird gezeigt, daß man den Weg, der von der Produkt-
g der Kosinusfunktion zu den Reihenwerten s_{2n} führt, auch in umgekehrter Rich-
icklegen kann, m. a. W. daß man jenes Produkt ableiten kann, indem man von
nderweitig bekannt vorausgesetzten Reihenwerten s_{2n} ausgeht.

II. INTERPOLATION. DIE GAMMAFUNKTION
DIE EULERSCHE KONSTANTE

Die den ersten der vier Bände, über die hier berichtet wird, eröffnende
De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice
(*Opera omnia* I_{14}, p. 1—24), die am 28. November 1729 der Petersburger
gelegt wurde, zeichnet sich in gleicher Weise aus durch die Bedeutung ihre
wie durch den Scharfblick, Erfindungsgeist und Kenntnisreichtum des dam
Verfassers. Es handelt sich darum, eine Funktion der reellen Veränderliche
die für positiv ganzzahliges $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Werte des allgemeine
WALLISschen „*series hypergeometrica*"

$$(1) \qquad 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \text{etc.}$$

annimmt, d. h. die dem zunächst nur für positive ganzzahlige x defini
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ auch für andere x *einen Sinn gibt.*[1]) Diese Funktion hat E

1) Die Fragestellung von E 19 hat mit der „Reihe" (1) nichts zu tun; wi
in (1) statt der + Zeichen Kommata setzen und von der „Folge"

$$(1') \qquad 1,\ 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 2 \cdot 3,\ \ldots$$

sprechen; auch in E 189 (I_{14}, p. 465) ist beispielsweise von der Reihe 1 + 2
die Rede, wo nach heutigem Sprachgebrauch die Folge 1, 2, 3, 4, ... gemeint is
Stellen freilich bedeutet bei EULER *series hypergeometrica* wirklich die Reihe
Folge (1')) oder die Reihe mit alternierenden Gliedern 1 — 1 + 2 — 6 + 24 — 1
E 247, I_{14}, p. 594), während wieder an anderen Stellen die Folge (1') (ohne
+ Zeichen) als „*series hypergeometrica*" bezeichnet wird (z. B. E 594, I_{17}, p. 217
Benennung *progressio* statt *series* E 47, I_{14}, p. 114).

EULER war sich selbstverständlich klar darüber, daß es sich bei den drei A
unendlichen Reihen, Produkte und Kettenbrüche im Grunde nur um verschiedene
unendlichen Folge handelt, wenn man auch den gelegentlichen Gebrauch des W
in diesem Sinne (wie oben) noch nicht als eine allgemeine Begriffsbestimmung an

späteren Arbeit (E 421, *Opera omnia* I_{17}, p. 341) mit $[x]$ bezeichnet[1]), und an die
Zeichen wollen wir uns, wie es auch in der Übersicht über die Bände 17, 18, 19 der ers
Serie geschehen ist (*Opera omnia* I_{19}, p. LX--LXV), im folgenden halten.

EULERS Ergebnis ist

$$[x] = \prod_{1}^{\infty} \frac{\nu^{1-x}(\nu+1)^x}{\nu+x}; \tag{2}$$

es macht keine Mühe zu zeigen, daß das Reziproke dieser Funktion $[x]$ identisch ist
der WEIERSTRASSschen ganzen Funktion

$$Fc(x+1) = e^{\gamma x} \prod_{1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}},$$

wo

$$\gamma = \lim_{\nu\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}-\log \nu\right) \tag{3}$$

die sog. „EULERsche Konstante" ist.[2])

In der Abhandlung 19 gibt EULER auch die (für $x \geqq 0$ gültige Integraldarstellung)

$$[x] = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^x dt, \tag{4}$$

transformiert häufig eine in der Form eines jener drei Algorithmen gegebene konvergente Fol
$f_1, f_2, f_3, \ldots$ in eine der beiden anderen Formen, z. B. einen Kettenbruch in eine Reihe. V
z. B. S. C dieses Berichts.

1) In der Abhandlung 19 kommt für diese Funktion überhaupt kein Zeichen vor, es wi
nur vom „*terminus, cuius index est x*" gesprochen. Sonst schreibt EULER auch $1\cdot 2\cdot 3\cdots$
statt $[x]$ (z. B. in der Überschrift von E 368; *Opera omnia* I_{11}) oder $\Delta : x$ (in E 352 und E 36
oder $\varphi : x$ (in E 768); für eine etwas allgemeinere Funktion schrieb er in E 613 $\Pi : x$. Ga
ähnlich ist das GAUSSsche Zeichen $\Pi(x)$ für $[x]$ (*Disquisitiones generales circa seriem infinita*
$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots$, *Werke*, Bd. 3, p. 145), während LEGENDRE die Bezeichnung $\Gamma(x+1)$ einführ
(*Exercices de calcul integral*, t. 2, 1814, p. 4) und WEIERSTRASS $Fc(x)$ für den reziproken W
von $\Gamma(x)$ schreibt (*Werke*, Bd. 1, S. 161). $[x]$ ist übrigens ursprünglich bei EULER ein allg
meines Funktionszeichen, das bald für diese, bald für eine andere Funktion gebraucht wir
z. B. bedeutet in E 465 (I_{15}, p. 207) $[n]$ soviel wie $(1+x)^n$, wieder eine andere Bedeutung h
$[n]$ in E 453 (I_{15}, p. 183). Für eine Verallgemeinerung von $[x]$ benutzt auch Euler das Zeichen
s. S. LXIV.

2) Nach N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1906, S. 12 komm
dieses Produkt zuerst bei O. SCHLÖMILCH, *Archiv der Math. und Physik*, Bd. 4, 1844, S. 171 u
bei F. NEWMAN, *Cambridge and Dublin math. Journal*, Bd. 3, 1848, S. 57 vor. Wegen der Ko
stanten γ siehe die Anmerkung 1 S. XI.

die durch die Substitution $t = e^{-z}$ in die heute gebräuchlichere, ebenfalls auf EUL
gehende (siehe z. B. E 368, *Opera omnia* I18)

$$(5)\qquad [x] = \int_0^\infty z^x e^{-z}\,dz$$

übergeht.

Er gewinnt ferner aus dem WALLISschen Produkte für π den Funktionswe

$$(6)\qquad \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und die sich daraus mittels der Funktionalgleichung

$$(7)\qquad [x+1] = (x+1)[x]$$

ergebenden. Für rationales $\frac{p}{q}$ drückt er den Funktionswert $\left[\frac{p}{q}\right]$ durch ein Pr
Betafunktionen aus; vgl. hierzu die dem Bande I18 vorangestellte Übersicht über
17, 18, 19, insbesondere S. LXI.

Am Schlusse der Abhandlung 19 gibt EULER eine Ausdehnung der Defi
n^{ten} Differentialquotienten einer Potenz für nicht notwendig ganzzahliges n:

$$(8)\qquad \frac{d^n z^\alpha}{dz^n} = \frac{[\alpha]}{[\alpha-n]}\, z^{\alpha-n}.$$

Durch was für Überlegungen EULER zu seinem Produkte der Funktion $[x]$ g
ist aus der Abhandlung 19 nicht ersichtlich.

Erst in der 1793, also mehr als 60 Jahre später, gedruckten Abhandlung
19. August 1776

De termino generali serierum hypergeometricarum

(*Opera omnia* I16, p. 139—162) finden wir den EULERschen Gedankengang sehr
einandergesetzt: Vermöge der Funktionalgleichung der Funktion $[x]$ ist einerseits
zahliges positives ν:

$$(9)\qquad [x+\nu] = (x+1)(x+2)\ldots(x+\nu)[x],$$

und falls auch x ganzzahlig ist,

$$[x+\nu] = (\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+x)[\nu],$$

also

$$(10)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{[x+\nu]}{[\nu]}\,\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+x)} = 1$$

und auch mit beliebigem festem α

$$(11)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\frac{[x+\nu]}{[\nu](\nu+\alpha)^x} = 1.$$

Verlangt man nun von der Funktion $[x]$, die aufzustellen versucht wird, daß sie auße der Funktionalgleichung und der Nebenbedingung $[1] = 1$ für beliebiges (nicht negati ganzzahliges) x der Gleichung (10) oder (11) genüge, so folgt aus (9) und (11) durch Division

$$(12) \qquad [x] = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\nu + \alpha)^x \, 1 \cdot 2 \ldots \nu}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu)}.$$

Nennt man den hier rechts stehenden Bruch $f(\nu)$, so kann man auch, indem man noc $\alpha = 1$ setzt, schreiben (man sieht nämlich leicht, daß die rechte Seite von α unabhängi ist; Beweis *Opera omnia* I_{16}, S. 148):

$$(13) \qquad \begin{aligned} [x] &= f(1) \frac{f(2)}{f(1)} \frac{f(3)}{f(2)} \frac{f(4)}{f(3)} \ldots \\ &= \frac{2^x}{x+1} \cdot \frac{2^{1-x} \cdot 3^x}{x+2} \cdot \frac{3^{1-x} \cdot 4^x}{x+3} \cdot \frac{4^{1-x} \cdot 5^x}{x+4} \ldots \end{aligned}$$

Hinterher erkennt man unschwer, daß dieses mit (12) übereinstimmende unendlich Produkt für alle nicht ganzzahlig negativen x konvergiert und daß es eine Funktion da stellt, und zwar die einzige, die allen verlangten Bedingungen genügt. Was an der vor stehenden Darstellung neuzeitlicher ist als bei EULER, betrifft mehr das äußere Gewand al das Wesen.

1) EULER hat damit den grundlegenden Satz aus der Theorie der Gammafunktion vorweg genommen, den K. WEIERSTRASS 1856 im 51. Bande des *Journals für die reine und angewand Mathematik* ohne Kenntnis von EULERS Vorgängerschaft veröffentlicht hat (siehe *Math. Werke vo* KARL WEIERSTRASS, Bd. 1, Berlin 1894, S. 193). An einer späteren Stelle (*Werke*, Bd. 2, S. 91 nennt WEIERSTRASS GAUSS als den Entdecker der EULERschen Produktentwicklung (12) (sieh CARL FRIEDRICH GAUSS, *Werke*, Bd. 3, S. 143, wo EULER ebenfalls nicht genannt wird). WEIE STRASS hat dort das Produkt (12) ausdrücklich als Vorbild für seine allgemeine Produktdarste lung ganzer transzendenter Funktionen bezeichnet.

Tatsächlich hat EULER nicht nur die Produktdarstellung (12), sondern sogar den Gedanke der Konvergenz erzeugenden Faktoren WEIERSTRASS vorweggenommen. Denn es bedeutet keine Unterschied, ob man den Gliedern des divergenten Produktes $\prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ die Konvergenz er zeugenden Faktoren $e^{-\frac{x}{\nu}}$ oder den Gliedern der divergenten unendlichen Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu \log \left(1 + \frac{x}{\nu}\right.$ die Konvergenz erzeugenden Summanden $-\frac{x}{\nu}$ oder auch $-x \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$ beifügt. Das tat abe EULER mit voller Absicht in der Abhandlung 613; vgl. S. XLVII dieses Berichts.

Der große Unterschied gegenüber WEIERSTRASS bleibt natürlich der, daß EULER nich eine allgemeine ganze Funktion aus ihren Nullstellen konstruieren wollte, sondern die besonder Funktion $\Gamma(x+1)$ (also das Reziproke einer ganzen Funktion) aus ihrer Funktionalgleichung.

f*

In der Abhandlung 652 bildet und untersucht EULER noch die Funktion

$$\varphi(x) = a^x \cdot \frac{a^{1-x}(a+b)^x}{a+xb} \cdot \frac{(a+b)^{1-x}(a+2b)^x}{a+(x+1)b} \cdot \frac{(a+2b)^{1-x}(a+3b)^x}{a+(x+2)b} \cdots$$

die eine Verallgemeinerung von $[x]$ ist; sie genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(x+1) = (a+xb)\varphi(x)$$

und nimmt für $x = n$ (positiv ganzzahlig) den Wert

$$a(a+b)(a+2b)\dots(a+(n-1)b)$$

an. Beispielsweise findet EULER

$$\left(\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = a \cdot \int_0^1 \frac{x^{2a+b-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2b}}} : \int_0^1 \frac{x^{2a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2b}}},$$

wobei freilich den Konstanten a, b noch gewisse Bedingungen aufzuerlegen wä

In der gleichzeitig mit 652 vorgelegten Abhandlung 661

Variae considerationes circa series hypergeometricas

(*Opera omnia* I16, p. 178—192) wird noch gezeigt, daß die soeben betrachtete Fu

für große positive x asymptotisch gleich

$$A\,e^{-x}(a-b+bx)^{\frac{a}{b}+x-\frac{1}{2}}$$

ist, wo A eine von a und b, aber nicht von x abhängige Zahl ist. Es würde si lohnen, die EULERschen Bemühungen um die Ermittelung dieser Zahl A w nehmen. Zwei weitere von EULER betrachtete und von ihm $\Delta : i$ und $\Theta : i$ gen tionen lassen sich auf $\varphi(x)$ (von EULER $\Gamma : i$ genannt) zurückführen.

Nachdem EULER in der Abhandlung 19 mit großem Erfolg aus dem nur ganzzahlige n definierten Ausdruck $n!$ mittels Interpolation die Funktion $[x]$ gew wandte er sich bald anderen bestimmten Interpolationsaufgaben wie auch allgem der Interpolationslehre zu.

In der auf 19 folgenden Abhandlung 20, die erst $1^1/_2$ Jahre später als 19 1731 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde und die den Titel hat

De summatione innumerabilium progressionum

(*Opera omnia* I14, p. 25—41), wird die für $x = 1, 2, 3, \dots$ definierte Funktion

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}$$

durch den Ausdruck $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ auf alle positiven x ausgedehnt. Darüber wurde s
vorigen Abschnitt S. XVIII berichtet, weil in der Abhandlung 20 zum ersten Mal
Frage nach dem Werte der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ aufgeworfen wurde. Noch in einer weite
sicht ist die Abhandlung 20 merkwürdig: In ihrem 10. Paragraphen (*Opera omnia* I
wird zum ersten Male (in noch nicht voll befriedigender Weise) die EULERsche K

$$\gamma = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}-\log\nu\right) \tag{13}$$

definiert.

In der Abhandlung 43 vom 11. März 1734

De progressionibus harmonicis observationes

(*Opera omnia* I$_{14}$, p. 87—100) werden dann 6 Dezimalstellen von γ berechnet (
richtig sind) auf Grund der Formel

$$\gamma = \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{4}s_4 - \frac{1}{5}s_5 + \cdots \tag{14}$$

Eine viel genauere Berechnung erfolgte dann in der Abhandlung 47, über d
im ersten Abschnitt berichtet wurde. Vom übrigen Inhalt der Abhandlung 43 si
leicht noch erwähnenswert Reihen von der Art der beiden folgenden:

$$\begin{aligned}&\log n = \sum_0^\infty\left(\frac{1}{1+\nu n}+\frac{1}{2+\nu n}+\cdots+\frac{1}{n-1+\nu n}-\frac{n-1}{n+\nu n}\right),\\ &0 = 1-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{2}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots;\end{aligned} \tag{15}$$

deren erste folgt aus der Gleichung

$$\log n = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{\nu}\right),$$

die zweite ergibt sich für $x=1$ aus der Potenzreihe

$$\log\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

Die Reihe für $\log\frac{1-x^n}{1-x}$ liefert im Falle $x=1$ einen zweiten Beweis für (15).

(*Opera omnia* I$_{16}$, p. 569—603) ist ausschließlich der EULERschen Konstanten γ ge[...] deren Berechnung auf verschiedene Weisen gezeigt wird, teils mit Hilfe der EUL[ERschen] Summenformel, teils mit Benutzung des Zusammenhangs zwischen γ und den [Potenz]summen s_n. Am Schlusse der Arbeit werden 8 Formeln zusammengestellt, die alle [auf ver]schiedene Weisen γ durch die Werte s_n ausdrücken, darunter die Formel (14) von [...] als Beispiele mögen noch folgende Formeln angeführt werden:

$$1-\gamma=\frac{1}{2}(s_2-1)+\frac{1}{3}(s_3-1)+\frac{1}{4}(s_4-1)+\cdots$$

$$1-\log\frac{3}{2}-\gamma=\frac{1}{3\cdot 2^2}(s_3-1)+\frac{1}{5\cdot 2^4}(s_5-1)+\frac{1}{7\cdot 2^6}(s_7-1)+\cdots$$

Aus der Formel

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\left(\int_0^x\frac{(1-z^n)\,dz}{1-z}-\ln\frac{1-x^n}{1-x}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\left(\int_0^x\frac{(1-z^n)\,dz}{1-z}+n\int_0^x\frac{z^{n-1}\,dz}{1-z^n}-\int_0^x\frac{dz}{1-z}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(\frac{n z^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^n}{1-z}\right)dz\end{aligned}$$

gewinnt EULER durch die Substitution $z^n=t$ und den Grenzübergang $n\to\infty$ die In[tegral]darstellung

$$\gamma=\int_0^1\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\ln t}\right)dt.$$

Die erstmals in der Abhandlung 20 gestellte Interpolationsaufgabe: eine Funkti[on] zu bilden, welche für alle positiven ganzzahligen $x=n$ die vorgeschriebenen Werte

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n) \tag{16}$$

annimmt, wird wieder aufgegriffen in der Abhandlung 613 vom 13. März 1780[1])

---

1) Der Inhalt dieser Abhandlung findet sich zum Teil schon vorher im 17. Kapitel [partis] *posterioris* der *Institutiones calculi differentialis* (*Opera omnia* I$_{10}$, p. 619—647), das üb[erhaupt] eine (natürlich nicht vollständige) Zusammenfassung der EULERschen Untersuchungen über [Inter]polation enthält, von denen im obigen zweiten Abschnitt unserer Übersicht die Rede ist.

· *Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentialis de functionibus inexplicab*
(*Opera omnia* I₁₆, p. 1—33).

Der Ansatz

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) \tag{17}$$

löst die gestellte Aufgabe für $x > 0$, wenn $\varphi(x)$ für $x \to \infty$ monoton gegen Null
Die von EULER angegebene Bedingung $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ ohne den Zusatz der Monotonie
nügt zwar, um die Konvergenz der Reihe (17) für ganzzahliges $x = n > 0$ nach dem G
wert (16) sicherzustellen, aber nicht für die Konvergenz der Reihe im Falle eines beliebig
doch ist andrerseits die Monotonie der Konvergenz von $\varphi(x)$ gegen Null hinreichend,
nicht notwendig.

Im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$ ergibt sich so

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{\nu(x+\nu)}; \tag{18}$$

in der Abhandlung 20 hatte EULER im nämlichen Falle die Lösung $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ gefun
die mit (18) identisch ist, worauf übrigens EULER nicht hinweist; doch berechnet er
dort für $x = \frac{1}{2}$ den Funktionswert und findet natürlich wieder den auf anderem Weg
E 20 erhaltenen Wert $2 - 2\log 2$.

EULER betrachtet dann Fälle, in welchen der Ansatz (17) nicht konvergiert,
$\varphi(\nu) = \sqrt{\nu}$, $\varphi(\nu) = \log \nu$ usw. In solchen Fällen hilft er sich auf eine sehr merkwür
Weise, indem er den einzelnen Reihengliedern in (17) noch Konvergenz erzeugende S
nanden und zum Ausgleich der ganzen Reihe ein Anfangsglied beifügt. Sein Gedankeng
ist etwa folgender: er entwickelt $\varphi(x+\nu)$ formal nach den Regeln der Differenzenrechn
in die Reihe

$$\varphi(x+\nu) = \varphi(\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(\nu+2) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu)) + \tag{19}$$

woraus sich ergibt

$$0 = [\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu)] + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(\nu+2) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu)) \tag{20}$$

Von der hier rechtsstehenden Reihe war der erste Summand das allgemeine G
der Reihe (17).

Statt dessen nimmt nun EULER bei seinem zweiten Ansatz für $f(x$ Glieder von (20) und muß dann zum Ausgleich bei $f(x)$ offenbar das An hinzufügen. Auf diese Weise kommt er zu dem Ansatz

$$(21)\qquad f(x) = x\varphi(1) + \sum_{1}^{\infty}[\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu$$

Wenn

$$\lim_{\nu\to\infty}(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) = 0$$

ist, konvergiert diese Reihe für jedes ganzzahlige $x = n > 0$ nach dem W $+ \cdots + \varphi(n)$.

Um aber die Konvergenz der Reihe (21) für jedes positive x zu noch eine Zusatzbedingung machen, als welche beispielsweise die Monoton einem gewissen x ab hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Der dritte Ansatz EULERS

$$(22)\qquad \begin{aligned} f(x) &= x\varphi(1) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &+ \sum_{1}^{\infty}\Big[\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(\nu+2) - 2 \end{aligned}$$

nimmt von (20) her noch ein weiteres Glied, der vierte noch eines mehr irgendein Ansatz, so auch alle späteren, und zwar nach der nämlichen läßt sich z. B. im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$ der sich aus dem ersten Ansatz ergebe

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 9} + \cdots$$

mittels des dritten Ansatzes durch die besser konvergente Reihe

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}\right.$$

darstellen, damit ist also zugleich für gewisse Reihen ein Verfahren der serung gewonnen. Die von EULER gefundenen Funktionen $f(x)$ genüge gleichung

$$f(x+1) = f(x) + \varphi(x+1);$$

es genügt daher, die Funktionswerte $f(x)$ aus den hergeleiteten Reihen

$0 < x < 1$ zu berechnen, worauf für die übrigen x die Funktionalgleichung benu werden kann.

Der dritte Ansatz führt (wie EULER zu beweisen versucht[1]) zum Ziele im Fa $\varphi(\nu) = \nu^\alpha$, wenn $\alpha < 2$ ist, der zweite im Falle $\varphi(\nu) = \nu^\alpha$, wenn $\alpha < 1$ ist, außerdem Falle $\varphi(\nu) = \log \nu$.

Im letzteren Falle z. B. liefert er

$$f(x) = \sum_1^\infty \log \frac{(\nu+1)^x \nu^{1-x}}{x+\nu}. \tag{23}$$

$f(x)$ ist der Logarithmus der EULERschen Funktion $[x]$, für deren Produktdarstellung

$$[x] = \prod_1^\infty \frac{(\nu+1)^x \nu^{1-x}}{x+\nu} \tag{24}$$

sich somit in diesem Zusammenhang eine besonders einfache und schöne Herleitung ergibt

In der Abhandlung 613 werden noch einige allgemeinere Produkte betrachtet; m findet sich in ihr ein Bild der Kurve $y = f(x)$ im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$, ebenso wie eine Zahle rechnung für $\int_0^1 f(x)\,dx$.

In den besprochenen Arbeiten über die Interpolationsaufgabe, die verlangt, eine Fun tion $f(x)$ zu bilden, deren Werte für $x = 1, 2, 3, \ldots$ vorgeschrieben sind, scheint sich EUL nicht ganz klar geworden zu sein, daß diese Aufgabe, wenn man keine Nebenbedingung macht, unendlich viele Lösungen hat, und er empfand es als etwas sehr Merkwürdiges, er sozusagen zufällig („*quasi casu*") zur Untersuchung einer Reihe $s(x)$ geführt wurde, für $x = a^n$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Werte $s(a^n) = n$ annahm genau wie die Funkti ${}^a\log x$ (a ist bei EULER > 1 zu denken), ohne daß $s(x) = {}^a\log x$ wäre. Die Reihe $s(x)$ folgende:

$$s(x) = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6}$$

$$+ \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{a^6-a^{10}} + \cdots$$

---

1) Diese Konvergenzuntersuchungen EULERS sind recht bemerkenswert; man würde mente natürlich in andere Form bringen.

2) Tatsächlich betrachtet EULER in 613 ein allgemeineres Produkt, von dem er aber (2 als besonderen Fall schon in den *Institutiones calculi differentialis partis posterioris caput XV* hervorgehoben hatte (*Opera omnia* I$_{10}$, p. 635—640).

Die Abhandlung 190 vom 26. Januar 1750

Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae

(*Opera omnia* I14, p. 516—541) ist der Untersuchung dieser Funktion $s(x)$ gewidmet: $s(0)$ ergibt die sogen. LAMBERTsche Reihe

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\cdots;$$

EULER versäumt nicht, sie nach Potenzen von a zu entwickeln und auf die zahlentheoretische Bedeutung der Koeffizienten dieser Potenzreihe hinzuweisen. Ferner wird die Funktionalgleichung

$$s(x)-s(ax)+1=(1-ax)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right)\cdots$$

abgeleitet; das rechtsstehende unendliche Produkt kommt $\left(\text{für } x=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)$ später in der Theorie der Thetafunktionen vor. Auch die weitere Funktionalgleichung

$$s(a^2x)=2s(ax)-s(x)+ax(1+s(x)-s(ax))$$

wird abgeleitet, wie auch die Entwicklung von $s(x)$ nach Potenzen von x.

Allgemeiner wird die erwähnte Interpolationsaufgabe, $f(x)$ aus den gegebenen Werten $f(1), f(2), f(3), \ldots$ zu bestimmen, wieder aufgenommen in der Abhandlung 189

De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum

(*Opera omnia* I14, p. 463—515), die dreiviertel Jahre später als 190, nämlich am 21. September 1750, der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. EULER sagt, es sei sonderbar und gegen die allgemeine Erwartung, daß es unendlich viele Funktionen $f(x)$ gebe, die in den unendlich vielen Funktionswerten $f(1), f(2), f(3), \ldots$ übereinstimmen; z. B. habe die Aufgabe: die Funktion $f(x)$ zu finden, für die $f(n)=n$ sei ($n=1, 2, 3, \ldots$), folgende allgemeine (nicht allgemeinste) Lösung:

$$f(x)=x+\sum_{1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\pi x; \tag{25}$$

EULER meint, obwohl er von geometrischen Vorstellungen ausgeht und erkennt, daß es sich um die Bestimmung einer durch gegebene Punkte gehenden, im übrigen willkürlichen Kurve handelt, die Funktion $f(x)-x$ müsse periodisch sein, und sagt (in § 9) ausdrücklich, daß für jede Funktion $f(x)$, für die $f(n)=1$ gilt,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\cdots$$

müsse. Er kommt zu diesem Schlusse, weil er in dem zuletzt erwähnten Beispiele die …chst nur für ganzzahliges x geltende Gleichung

$$f(x+1) = f(x)$$

jedes x in Anspruch nimmt, ebenso wie er in dem zuerst genannten Beispiele, wo die …ktionswerte $f(n) = n$ gegeben waren, allgemein die Funktionalgleichung

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

…tzt. Um diese zu lösen, verfährt er so: er entwickelt die linke Seite von (26) nach dem …LORschen Lehrsatze

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} + \cdots$$

schließt durch Einsetzen in (26), daß die gesuchte Funktion $y = f(x)$ der linearen …rentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$y' + \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} + \cdots = 1$$

…gen müsse. Diese integriert er nach dem für eine endliche Ordnung bewiesenen[1]) Ver…n, indem er zu dem partikulären Integrale $y = x$ das allgemeine Integral der Differential…hung

…) $$y' + \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} + \cdots = 0$$

…rt, das die Form hat

$$y = \sum_1^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu x},$$

…die c_ν willkürliche Konstanten und die λ_ν die Nullstellen der Funktion

$$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = e^z - 1,$$

die Vielfachen von $2\pi i$ sind. Indem er schließlich in (28) die Exponentialfunktionen …n trigonometrische ersetzt, findet er als Lösung der Differentialgleichung (27a):

$$\sum_1^{\infty} b_\nu \sin 2\nu\pi x + \sum_0^{\infty} a_\nu \cos 2\nu\pi x$$

1) Zuerst in E 62 (*Opera omnia* I22), dann auch in *Institutiones calculi integralis, volu… secundum, sectio secunda,* cap. II (*Opera omnia* I12, p. 296—317).

und somit als Lösung der gestellten Interpolationsaufgabe

$$(30)\qquad f(x) = x + \sum_{1}^{\infty} b_\nu \sin 2\nu\pi x + \sum_{0}^{\infty} a_\nu \cos 2\nu\pi x,$$

wo wegen der Bedingung $f(n) = n$ die Koeffizienten a_ν noch der Bedingung $\sum_{0}^{\infty} a_\nu =$ genügen haben. *In dem Ausdruck* (29) **kann** *man trotz der Fragwürdigkeit seiner Herlei* einen ersten Ansatz für die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch eine trig metrische Reihe erblicken. Freilich glaubt EULER den Ansatz (29) noch durch einen and ersetzen zu sollen: Er sagt, daß alle in (29) vorkommenden Funktionen $\sin 2\nu\pi x$, $\cos 2$ gerade Funktionen von

$$p = \sin \pi x \quad \text{und} \quad q = \cos \pi x$$

seien, und ersetzt daher (29) durch eine willkürliche gerade Funktion von p und q. Dal von ihm zu Eingang seiner Abhandlung gegebene Beispiel (25) nicht ein Sonderfall s allgemeinen Lösung (30) ist, scheint ihm nicht aufgefallen zu sein.

Neben den beiden erwähnten Beispielen $f(n) = 1$ und $f(n) = n$ werden noch me andere (z. B. $f(n) = m^n$) in ähnlicher Weise behandelt: Die Interpolationsaufgabe zu wird durch die Aufgabe, eine Funktionalgleichung zu lösen, ersetzt, und diese wird au Integration einer Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung zurückgeführt.

Das gelegentliche Vorkommen von $e^z - 1$ als Hilfsfunktion nimmt EULER zum A um erneut ausführlich auf die Produkt- und Partialbruchentwicklungen der elemen Funktionen, auf die BERNOULLIschen Zahlen und die Reihen $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}}$ wie auch auf Summenformel zu sprechen zu kommen.

Auch die Abhandlung 555 vom 18. Mai 1773

De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina

(*Opera omnia* I15, p. 435—497) beginnt mit einem Hinweis auf die Vieldeutigkeit des I polationsproblems und darauf, daß die dann folgenden Ausführungen nur eine bestin Lösung aus unendlich vielen geben. Es wird dann eine ungerade Funktion $f(x)$ angen men, von der die Funktionswerte $p = f(a)$, $q = f(b)$, $r = f(c)$, $s = f(d)$ usw. bekannt s Dann wird die gerade Funktion $\frac{f(x)}{x}$ in eine Reihe

$$(31)\qquad \frac{f(x)}{x} = A + B(x^2 - a^2) + C(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + D(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) + \cdots$$

entwickelt, für deren Koeffizienten

$$A\left(= \frac{p}{a}\right), \quad B, \quad C, \quad D \ldots$$

das Bildungsgesetz angegeben wird. Es handelt sich also im wesentlichen um die be
Interpolationsformel NEWTONS, der aber nicht genannt wird. Die Gleichung (31) wir
auch auf die sogen. LAGRANGEsche Form gebracht

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{p}{a} \cdot \frac{b^2-x^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{c^2-x^2}{c^2-a^2} \cdot \frac{d^2-x^2}{d^2-a^2} \cdot \text{etc.} \\
&+ \frac{q}{b} \cdot \frac{a^2-x^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{c^2-x^2}{c^2-b^2} \cdot \frac{d^2-x^2}{d^2-b^2} \cdot \text{etc.} \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Im ersten Beispiel wählt EULER $f(x) = \sin x$ und nimmt die vier Interpolation

$$a = \varphi, \quad b = 2\varphi, \quad c = 3\varphi, \quad d = 4\varphi.$$

Schließlich erhält er aus (32) durch den Grenzübergang $x \to 0$ die Näherungs

$$
\begin{aligned}
\varphi = {} & \frac{\sin\varphi}{1} \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \\
& - \frac{\sin 2\varphi}{2} \cdot \frac{1\cdot 1}{1\cdot 3} \cdot \frac{3\cdot 3}{1\cdot 5} \cdot \frac{4\cdot 4}{2\cdot 6} \\
& + \frac{\sin 3\varphi}{3} \cdot \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 3}{1\cdot 7} \\
& - \frac{\sin 4\varphi}{4} \cdot \frac{1\cdot 1}{3\cdot 5} \cdot \frac{2\cdot 2}{2\cdot 6} \cdot \frac{3\cdot 3}{1\cdot 7}.
\end{aligned}
$$

Indem er statt vier unendlich viele Interpolationsstellen $\varphi,\ 2\varphi,\ 3\varphi, \ldots$ annimm
winnt er durch Grenzübergang die für $-\pi < \varphi < \pi$ gültige FOURIERsche Reihe

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \cdots; \tag{33}$$

deren Herleitung aus der LAGRANGEschen Interpolationsformel ist sehr merkwürdig
auftauchenden Zweifel, ob die Gleichung (33) auch für $\varphi = \pi$ richtig sei, beschw
EULER durch die Bemerkung, man habe dann eben für φ in (33) $\pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ einz
und darauf zur Grenze $\varepsilon \to 0$ überzugehen. Gegen diese auf einer unbegründeten Vertaus
zweier Grenzübergänge beruhende unzulässige Definition einer Reihensumme, deren G
Funktionen einer Veränderlichen φ sind, mußte noch im 20. Jahrhundert angel

werden.[1]) EULER behauptet übrigens sogar, daß die Reihe noch für $\varphi = 2\pi$
(E 555, § 16; *Opera omnia* I_{15}, p. 450.)

Die Wahl der Interpolationsstellen

$$\frac{\varphi}{2},\ \frac{3}{2}\varphi,\ \frac{5}{2}\varphi,\ \cdots$$

führt EULER zu der Reihe

$$\sin\omega - \frac{1}{9}\sin 3\omega + \frac{1}{25}\sin 5\omega - \frac{1}{49}\sin 7\omega + \cdots, \tag{34}$$

von der er meint, sie konvergiere ohne Einschränkung gegen $\frac{\pi\omega}{4}$, wa
$|\omega| \leqq \frac{\pi}{2}$ richtig ist. Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (34) ein neuer Beweis (der fün
S. XXXVII) für die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots,$$

die mit $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ gleichbedeutend ist. Ferner liefert die Integration von
Beweis der Gleichung

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Durch immer wieder andere Wahl der Interpolationsstellen gelangt
großen Zahl sehr merkwürdiger Reihen; zur Untersuchung der auftretenden
er Betafunktionen heran. Es ist in diesem kurzen Berichte unmöglich, alle d
Ergebnisse oder gar die von EULER zu deren Gewinnung eingeschlagenen
Richtigkeit zu prüfen. Als Beispiele mögen die in §§ 26 und 27 (*Opera o*
stehenden Reihen betrachtet werden. Die erste Gleichung des § 26, wo die
nur auf der rechten Seite vorkommt,

$$\pi\cot\pi x = \frac{\cos x\varphi}{x} - \frac{\cos(1-x)\varphi}{1-x} + \frac{\cos(1+x)\varphi}{1+x} - \frac{\cos(2-x)\varphi}{2-x} + \cdots$$

$$= \cos x\varphi\left(\frac{1}{x} - \frac{2x\cos\varphi}{1-x^2} - \frac{2x\cos 2\varphi}{4-x^2} - \frac{2x\cos 3\varphi}{9-x^2} - \cdots\right. \tag{35}$$

$$-\sin x\varphi\left(\frac{2\sin\varphi}{1-x^2} + \frac{2\cdot 2\sin 2\varphi}{4-x^2} + \frac{2\cdot 3\sin 3\varphi}{9-x^2} + \frac{2\cdot 4\sin \ldots}{16-\ldots}\right.$$

1) Vgl. A. PRINGSHEIM, *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereini*
S. 591 und *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Bd. $II_{1,1}$, Leipzig 18
Anmerkung 170.

ist für alle (nicht ganzzahligen) x und für $|\varphi| \leq \pi$ richtig; die mit $\cos x\varphi$ multipli
Klammer ist nämlich gleich $\frac{\pi \cos x(\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $-\pi \leq \varphi \leq 0$ und $= \frac{\pi \cos x(-\varphi + \pi}{\sin x\pi}$
$0 \leq \varphi \leq \pi$, während die mit $-\sin x\varphi$ multiplizierte Reihe gleich $\frac{\pi \sin x(\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$
$-\pi \leq \varphi < 0$ und $= \frac{\pi \sin x(-\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $0 < \varphi \leq \pi$ ist. Indem er (35) zwischen den
zen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ integriert, gewinnt Euler die Partialbruchreihe

$$\frac{\pi^2 \cos x\pi}{\sin^2 x\pi} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \cdots,$$

während die Integration zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{x}$ die Reihe

$$\frac{\pi^2}{x} \cot x\pi = \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{(x-1)^2} - \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{(x+1)^2} + \frac{\sin\frac{2\pi}{x}}{(x-2)^2} - \frac{\sin\frac{2\pi}{x}}{(x+2)^2} + \cdots$$

liefert.

Es dürfte sich wohl lohnen zu untersuchen, inwieweit andere von Euler in der
handlung 555 mitgeteilte Reihen und inwieweit seine Herleitungen richtig sind. E
selbst sagt, daß er seinen Ergebnissen nicht ganz traue (§ 33; *Opera omnia* I_{16}, S.
er begründet dieses Mißtrauen nicht mit dem Fehlen jeder Konvergenzuntersuchung, son
nur mit der erwähnten Vieldeutigkeit der Interpolationsaufgabe. Bei dieser Gelegenheit
er auch die Frage auf: Wie gewinnt man die allgemeinste Funktion $F(x)$, welche für

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots \quad \text{die Werte} \quad p,\ q,\ r,\ s,\ \ldots$$

annimmt, wenn man *eine* solche Funktion $f(x)$ kennt? Eulers Antwort lautet: Man
eine Funktion $\Omega(x)$ mit den Nullstellen $a, b, c, d, \ldots$ Ist dann $w(z)$ eine für $z = 0$
schwindende, im übrigen willkürliche Funktion, so ist

$$F(x) = f(x) + w(\Omega(x)).$$

Die richtige Antwort lautet natürlich

$$F(x) = f(x) + \Omega(x)\, w_1(x),$$

wo $w_1(x)$ irgendeine willkürliche Funktion ist. Es ist noch zu erwähnen, daß Eule
dieser unter manchem Gesichtspunkt bedeutenden Arbeit auch ausführlich auf den Zusam
hang zwischen den in seinen Entwicklungen (vgl. (32)) auftretenden Produkten und se
Betafunktionen eingeht.

Zum Schlusse dieses Abschnitts darf noch eine Abhandlung erwähnt werden, die w
ihres geometrischen Gewandes in den *Geometrieband* III der *Opera omnia* aufgenom

wurde, die aber inhaltlich eine Einzelschrift über die Gammafunktion ist; 19. Dezember 1765 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung 368

De curva hypergeometrica hac aequatione $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x$ expre

EULER sagt hier, daß die in der Überschrift genannte Funktion desha stimmt sei, weil sie nicht nur die Werte $\Pi(n) = n!$ für positives ganzzahlig sondern außerdem der Funktionalgleichung $\Pi(x+1) = (x+1)\,\Pi(x)$ genügen dem schon aus früheren Abhandlungen Bekannten werden in 368 insbesondere stellen der Funktion $\Pi'(x)$ bestimmt, sowie die Funktionswerte $\Pi'(0)$, Π' ferner $\Pi'\left(\frac{1}{2}\right) : \Pi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Pi'\left(\frac{3}{2}\right) : \Pi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Pi'\left(\frac{5}{2}\right) : \Pi\left(\frac{5}{2}\right)$ usw.

1) Vgl. S. XLI. Wenn es auch nur Zweckmäßigkeitsüberlegungen sind, d der Funktionalgleichung nötigen, so haben sie doch tatsächlich etwas Zwingend

III. DIE TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN

Der hauptsächliche Inhalt der Abhandlungen EULERS, über die in diesem Abschnit berichtet werden soll, war für seine mathematischen Zeitgenossen etwas bewundernswe Neues. Wenn er für die heutigen Mathematiker vielleicht nicht ebenso fesselnd ist, so lieg dies daran, daß er dank EULER zum festen Bestandteil der mathematischen Bildung geworde ist. Daß er es war, der das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen zu einem brauch baren und geschmeidigen Werkzeug der Analysis und ihrer Anwendungen gemacht ha betont er selbst mit berechtigtem Stolze in der Einleitung zu der sofort näher zu be sprechenden Abhandlung 246, und er fügt hinzu, man dürfe dieses Verdienst nicht deswege gering achten, weil es zum guten Teil in der Einführung einer passenden Bezeichnungs weise bestehe. Die volle Bedeutung EULERS auf dem Gebiete der trigonometrischen Funk tionen[1]) wird man freilich aus den paar hier zu besprechenden Arbeiten nicht ermesse können; sie beruht auf viel breiterer Grundlage, insbesondere auch auf den Anwendunge der Trigonometrie, die EULER in Geometrie, Mechanik und Astronomie gemacht hat.

In der Abhandlung 128 vom 15. Dezember 1749

Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales

(*Opera omnia* I$_{14}$, p. 364—406) geht EULER von den Partialbruchreihen

$$\frac{1}{1\pm p} \pm \frac{1}{4\pm p} \pm \frac{1}{9\pm p} \pm \frac{1}{16\pm p} + \cdots \tag{1}$$

aus und bemerkt, daß er deren Summen in der ein paar Wochen zuvor der Akademie vo gelegten Abhandlung 130 (vgl. S. XXIX) mitgeteilt habe. Aus ihnen gewinnt er Produktda stellungen trigonometrischer Funktionen.[2]) Außerdem berechnet er die Koeffizienten α_ν, β

---

1) Vgl. u. A. v. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, Teil II, Leipzi 1903, 4. Kapitel.

2) Da er in E 130 umgekehrt die Reihen (1) aus diesen Produkten abgeleitet hatte, kan man das oben Mitgeteilte nicht als eine neue Ableitung der Sinus- und Kosinusprodukte a

der Potenzreihen von

$$\sin\frac{\pi}{2}x = \sum_1^\infty \alpha_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad \cos\frac{\pi}{2}x = \sum_1^\infty \beta_\nu x^\nu$$

auf 28 Dezimalstellen (mit ganz unbedeutenden Ungenauigkeiten, die hö
drei Dezimalstellen betreffen), ferner auf 20 und mehr Stellen die Koeffiz
reihen für

$$\log\left(\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{und} \quad \log\cos\frac{\pi}{2}x$$

und auf 13 Stellen die Koeffizienten der Potenzreihen für $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ und $\frac{1}{x}$ c
dient er sich noch einer die Konvergenz verbessernden Umformung, indem
bei der Funktion $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ nicht die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ der
radius 1 besitzenden Potenzreihe

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x = \sum_1^\infty \gamma_\nu x^\nu$$

angibt, sondern die Koeffizienten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ der den Konvergenzrad
Potenzreihe

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{4x}{\pi(1-x^2)} = \sum_1^\infty \delta_\nu x^\nu.$$

Die ganze Abhandlung 128 kann als eine Vorarbeit für die *Intr*
werden, in die ihr wesentlicher Inhalt später übergegangen ist.

Die vorhin schon genannte Abhandlung 246

Subsidium calculi sinuum

(*Opera omnia* I_{14}, p. 542—584) ist am 9. März 1752 der Berliner und ein
12. März 1753, der Petersburger Akademie vorgelegt worden. Sie beginnt
dere Abhandlungen Eulers, z. B. 447, 562) damit, daß an Stelle der F
$\cos\varphi$ die Ausdrücke

(2) $$u = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad v = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

eingeführt werden (später werden dafür gewöhnlich die Buchstaben p, q
Zeichen $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ für u, v werden nicht verwendet. Insbesondere mit Benutz

---

sehen, sondern nur als die Beleuchtung eines früher festgestellten Zusammenh
deren Seite her. Erst aus der Ableitung der Reihen (1), die später in der n
entstandenen Abhandlung 60 bewiesen wurde (siehe S. XXXIII), läßt sich ohn
neuer Beweis für die Produktentwicklungen der trigonometrischen Funktionen

und auch die Produkte $\cos^m \varphi \sin^n \varphi$ (m, n ganzzahlig > 0) linear durch die Sinus u Kosinus der Vielfachen von φ ausdrücken, z. B.

$$2^{r+1} \cos^{2r+1} \varphi = \sum_0^r \binom{2r+1}{\nu} \cos(2r+1-2\nu)\varphi.$$

EULER nimmt fälschlich diese Formel auch für Potenzen des Kosinus mit negativ und gebrochenen Exponenten in Anspruch, wobei er die rechts stehende Summe in eine u endliche Reihe übergehen läßt. Besonders zu erwähnen ist noch das *Theorema* des § (*Opera omnia* I_{14}, S. 581), das besagt:

Kennt man die Summe der Reihe

$$\sum_0^\infty a_\nu z^\nu \quad (a_\nu \text{ reell, } z \text{ komplex})$$

(d. h. kann man sie durch die bekannten Funktionen ausdrücken), so kennt man auch d Summen der Reihen

$$\sum_0^\infty a_\nu \cos \nu\varphi, \quad \sum_1^\infty a_\nu \sin \nu\varphi.$$

Als Beispiele gibt EULER u. a. die folgenden:

$$\sum_0^\infty a^\nu \cos \nu\varphi = \frac{\cos\varphi - a}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}, \quad \sum_1^\infty a^\nu \sin \nu\varphi = \frac{\sin\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}.$$

Indem er die erste dieser Gleichungen auch für $a = -1$ in Anspruch nimmt, gewin er aus ihr durch Integration die für $|\varphi| < \pi$ richtige Entwicklung

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \cdots \quad \text{(vgl. (33), S. LIII).}$$

Das *Theorema* kehrt mit Beispielen später noch mehrmals bei EULER wieder (z. B. i den Abhandlungen 447, 655); auch in der *Analyse algébrique* von CAUCHY und in der A handlung ABELS über die binomische Reihe finden sich zugehörige Beispiele.

Die soeben genannte am 22. November 1733 der Petersburger Akademie vorgeleg Abhandlung 447 (*Opera omnia* I_{15}, p. 168—184)

Summatio progressionum $\sin^\lambda \varphi + \sin^\lambda 2\varphi + \cdots + \sin^\lambda n\varphi$, $\cos^\lambda \varphi + \cos^\lambda 2\varphi + \cdots + \cos^\lambda n$

beginnt wie 246 mit der Substitution (2); die in der Überschrift genannten endliche Summen werden dann in den Fällen $\lambda = 1, 2, 3, 4$ bestimmt, was auf die Summation en

h*

licher geometrischer Reihen hinausläuft. Euler erkennt, daß die unendlichen Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} (\cos \nu\varphi)^\lambda, \quad \sum_{1}^{\infty} (\sin \nu\varphi)^\lambda$$

bei ganzzahligem $\lambda > 0$ divergieren (bei geradem λ sogar eigentlich gegen $+\infty$), will auf Grund seiner Auffassung der divergenten Reihen[1]) die für die endlichen Re fundene Summierung auch für die unendlichen in Anspruch nehmen, was ihn zu baren Ergebnissen führt.

In der Abhandlung 561 vom 15. November 1773

Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes

(*Opera omnia* I16, p. 498—508) wird zunächst durch wiederholte Anwendung der Gl $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ das Produkt

$$\sin \varphi = \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{8} \cdot \cos \frac{\varphi}{16} \cdots \tag{3}$$

abgeleitet, das sich schon in der früheren Abhandlung 74 findet (vgl. Abschnitt VI Berichtes). Aus (3) werden dann weitere Formeln abgeleitet, z. B. durch logarit Differentiation

$$\frac{1}{\varphi} = \cot \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{8} + \cdots \tag{4}$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (4), aus der umgekehrt wieder (3) folg man auch, wie Euler zeigt, direkt summieren, wenn man alle vorkommenden T funktionen vermöge der Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \cot \varphi - \cot 2\varphi$$

ersetzt. In gleicher Weise ergibt sich aus der Beziehung

$$\cot 3\varphi = \frac{1}{3} \cot \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \tag{5}$$

die Summation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} = \cot \varphi &+ \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{9}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{9}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{9}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{27}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{27}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{27}\right)\right) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

1) Vgl. S. XII.

Die Gleichung (5) führt durch Integration auf die folgende:

$$\sin 3\varphi = 4 \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right).$$

sprechen weitere Produktdarstellungen:

$$\sin 4\varphi = 8 \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\cos\varphi,$$

$$\sin 5\varphi = 16 \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{10} + \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{10} - \varphi\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \varphi\right)\cos\left(\frac{3\pi}{10} - \varphi\right)$$

usw.,

nen dann wieder Reihen von der Art wie (4) abgeleitet werden können.

olche Produktdarstellungen der Funktionen $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ (für ganzzahliges $n > 0$) LER ausführlicher betrachtet in der am 12. Mai 1774 der Akademie vorgelegten Abng 562

Quomodo sinus et cosinus angulorum multiplorum per producta exprimi queant

omnia I15, p. 509—521).

Er findet diese Produkte, z. B.

$$\cos 2n\varphi = 2^{2n-1} \prod_0^{n-1} \sin\left(\frac{2\nu+1}{2n}\pi - \varphi\right)\sin\left(\frac{2\nu+1}{2n}\pi + \varphi\right),$$

er wie in den Abhandlungen 246, 247 an Stelle von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ die Größen $s\varphi + i\sin\varphi$, $q = \cos\varphi - i\sin\varphi$ betrachtet und dann $p^n \pm q^n$ in Faktoren zerlegt. Der Inhalt dieser Abhandlung findet sich auch im 14. Kapitel der *Introductio* (*Opera* I8, p. 258—283).

Die drei Abhandlungen 592 vom 14. August 1775, 636 vom 15. April 1776 und 655 März 1777

De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices,

De multiplicatione angulorum per factores expedienda,

tiones generales circa series, quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur

(*Opera omnia* I15, p. 621—660, I16, p. 79—111 und p. 163—177)

nichts grundsätzlich Neues, sondern zumeist nur Wiederholung; die erste befaßt t Partialbruchzerlegungen trigonometrischer Funktionen, wie sie auch in der Abhand-

durch Trennung des Realteils und Imaginärteils der Gleichung

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots$$

ergeben ($z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 < r < 1$, n reell; Verallgemeinerung auf komp
in der ABELschen Abhandlung über die Binomialreihe).

Am gleichen Tage wie die zuletzt erwähnte Abhandlung 655, nämlich am 6.
wurde auch die Abhandlung 686

Dilucidationes super formulis, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exp
ubi simul ingentes difficultates diluuntur

(*Opera omnia* I₁₆, p. 282—310) der Petersburger Akademie vorgelegt. Wen
Schwierigkeiten, von denen EULER in der Überschrift spricht, vom heutigen
aus als solche kaum angesehen werden können, und wenn auch gegen die Lös
gibt, sich manches einwenden läßt, so entbehrt die Arbeit doch in geschichtliche
licher Hinsicht nicht des Reizes. EULER geht aus von der Formel, die $2\cos n$
$n = 1, 2, 3, \ldots$ als ein Polynom von $x = 2\cos\varphi$ darstellt:

$$2\cos n\varphi = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6}$$

$$(6) \qquad + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-8} - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{n-}$$

$$+ \cdots$$

Er findet es sonderbar, daß die rechte Seite abbricht, sobald die Expon
anfangen würden negativ zu werden, und daß für ein negatives oder gebroc
rechte Seite, die dann zur unendlichen Reihe wird, nicht gleich $\cos n\varphi$ wird; er fr
ist der Wert der rechten Seite von (6), wenn die dort stehende Reihe als unc
gefaßt wird, bei beliebigem n, und wie erhält man eine Formel, die $\cos n\varphi$ durch
ausdrückt und die für jedes n gilt? Um diese Frage zu beantworten, geht Eu
Setzt man

$$z = \cos\varphi, \quad s = \cos n\varphi,$$

so ist die so definierte Funktion s von z ein partikuläres Integral der

ung

$$\frac{ds^2}{1-s^2} = \frac{n^2 dz^2}{1-z^2},$$

uch der aus (7) durch *nochmaliges Differenzieren* entstehenden linearen Differentialglei- zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 s}{dz^2}(1-z^2) - z\frac{ds}{dz} + n^2 s = 0.$$

allgemeines Integral mit den zwei willkürlichen Konstanten α, β ist

$$\alpha\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \beta\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n.$$

für das partikuläre Integral

$$s = \cos n\varphi,$$

$z = \cos\varphi$ gesetzt wurde, ist

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Andrerseits erhält man als allgemeines Integral der Differentialgleichung (8) durch nsatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$A\left(z^n - \frac{n}{4}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}z^{n-6} + \cdots\right)$$

$$+ B\left(z^{-n} + \frac{n}{4}z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8}z^{-n-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}z^{-n-6} + \cdots\right).$$

rgleichung mit (9) ergibt

$$A = 2^n\alpha, \quad B = \frac{\beta}{2^n}.$$

Wenn aber nun Euler aus (9), (11) einerseits und (12), (13) andrerseits schließt

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}\left(z^n - \frac{n}{4}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}z^{n-4} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}\left(z^{-n} + \frac{n}{4}z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8}z^{-n-4} + \cdots\right)$$

vieder $z = \cos\varphi$ gesetzt wird), so beachtet er nicht, daß (9), (10), (11) unter der setzung $|z| \leqq 1$ gelten, die Reihen (12) aber für $|z| < 1$ nicht konvergieren. Nur eine positive ganze Zahl ist, heben sich in dem auf der rechten Seite von (12)

stehenden Integral der Differentialgleichung (8) alle Glieder mit negativen E
man erhält also als Integral ein Polynom in x, das mit $\cos n\varphi$ identisch sei
kein anderes Polynom der Differentialgleichung genügt.

Der Inhalt der in den *Opera postuma* 1862 veröffentlichten Abhandlu

Enodatio insignis cuiusdam paradoxi circa multiplicationem angulorum

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 284—311) ist in der Hauptsache der gleiche wie der
sprochenen Abhandlung 686. Im einzelnen sind die Überlegungen etwas and
wird noch eine Untersuchung der Potenzreihe $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ der Funktion (1 -
gefügt. Aus Bemerkungen EULERS in 810 (noch deutlicher als aus solche
übrigens hervor, daß er schließlich doch nicht so von seiner Lösung der
$\cos n\varphi$ als Funktion von $\cos\varphi$ befriedigt war, wie man nach den Über
Arbeiten vermuten könnte; vgl. insbesondere E 810, § 22; *Opera omnia* I_{16^*}
sagt dort bei Betrachtung eines Zahlenbeispiels, daß zwar zweifellos die bei
divergenten Reihen auf der rechten Seite von (12) den richtigen Wert lief
nicht klar sei, wie man ihn daraus berechnen könne; ein bedeutsames un
liches Paradoxon bleibe übrig. Und wenn er sich notgedrungen mit seiner S
Definition der Reihensumme beruhigt, obwohl sie im vorliegenden Falle
durch Zahlenrechnung entratet, so betont er doch nochmals in § 23, d
Schwierigkeiten übrig bleiben.

Die Abhandlung 703 vom 26. Mai 1779

Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplor
quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimu

(*Opera omnia* I_{16}, p. 311—332) und die mit ihr zusammenhängende, de
Tage später vorgelegte Abhandlung 704

Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli p

(*Opera omnia* I_{16}, p. 333—355) behandeln mit glücklichstem Erfolg die v
die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der Entwickelung einer Funktion $f(\varphi)$ in ei

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \cdots \tag{15}$$

zu bestimmen. Von Sinusreihen ist im Gegensatz zur Überschrift der Abha
die Rede; das Fehlen dieser naheliegenden Ergänzung, wie auch daß EULE
der Abhandlung 704, die eine der bedeutendsten seines Alters ist, ganz geg

In der Abhandlung 703 leitet er folgende Formeln ab (in denen n eine ganze Zahl > 0 und $\omega = \frac{\pi}{n}$ ist):

$$(16)\quad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(\omega) + f(2\omega) + \cdots + f((n-1)\omega) + \frac{1}{2}f(\pi)\right) = a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots$$

und für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{2}{n}\left(\frac{1}{2}f(0) + \cos\nu\omega f(\omega) + \cos 2\nu\omega f(2\omega) + \cdots + \cos(n-1)\nu\omega f((n-1)\omega) + \frac{1}{2}\cos\nu\pi f(\pi)\right) \\ &\qquad = a_\nu + a_{2n-\nu} + a_{2n+\nu} + a_{4n-\nu} + a_{4n+\nu} + a_{6n-\nu} + a_{6n+\nu} + \cdots \end{aligned}$$

Die linke Seite von (16) liefert, wenn nicht den genauen Wert von a_0, so doch in vielen Fällen einen guten Näherungswert; ebenso kann die linke Seite von (17) zur Berechnung von a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ benutzt werden. In der Abhandlung 704 erscheint dann zum ersten Male die uns heute so geläufige Darstellung

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\varphi)\,d\varphi, \quad a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\varphi)\cos\nu\varphi\,d\varphi \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe

$$f(\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + a_3\cos 3\varphi + \cdots$$

Zum Schlusse wird dann noch die Reihe (15) in eine nach Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitende Reihe umgeformt.

In der Abhandlung 747 vom 13. März 1780

De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet

(*Opera omnia* I16*, p. 214—231) stellt sich Euler die Aufgabe, die Funktion $\cos 2x\omega$ in eine Binomialkoeffizientenreihe[1]) zu entwickeln:

$$\cos 2x\omega = 1 + Ax + B\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + C\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

---

1) Hinsichtlich solcher Reihen darf auf die *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Leipzig 1924) von N. E. Nörlund und das beigegebene ausführliche Literaturverzeichnis, wie auch auf den Nörlundschen Artikel II C 7 der *Encyklopädie der math. Wiss.* Bd. II3,2 (Leipzig 1923 bis 1927), S. 675 verwiesen werden.

$$\cos 2x\omega = 1 - 2\binom{x}{1}\sin\omega\,\sin\omega - 4\binom{x}{2}\sin^2\omega\,\cos 2\omega$$

$$+ 8\binom{x}{3}\sin^3\omega\,\sin 3\omega + 16\binom{x}{4}\sin^4\omega\,\cos 4\omega$$

(18)

$$- 32\binom{x}{5}\sin^5\omega\,\sin 5\omega - 64\binom{x}{6}\sin^6\omega\,\cos 6\omega$$

$$+ \cdots$$

Für $\sin 2x\omega$ ergibt sich die Reihe

$$\sin 2x\omega = 2\binom{x}{1}\sin\omega\,\cos\omega - 4\binom{x}{2}\sin^2\omega\,\sin 2\omega$$

$$- 8\binom{x}{3}\sin^3\omega\cos 3\omega + 16\binom{x}{4}\sin^4\omega\,\sin 4\omega$$

$$+ 32\binom{x}{5}\sin^5\omega\cos 5\omega - 64\binom{x}{6}\sin^6\omega\,\sin 6\omega$$

$$- \cdots$$

Euler unterläßt nicht, die rechte Seite von (18) nach Potenzen von
dann mit der Reihe

$$\cos 2x\omega = 1 - \frac{4x^2\omega^2}{2!} + \frac{16x^4\omega^4}{4!} + \cdots$$

zu vergleichen. Das Verschwinden des Koeffizienten von x^1 drückt sich
beiden Reihen

$$\frac{2}{1}\sin\omega\,\sin\omega - \frac{2^3}{3}\sin^3\omega\,\sin 3\omega + \frac{2^5}{5}\sin^5\omega\,\sin 5\omega - \cdots$$

und

$$\frac{2^2}{2}\sin^2\omega\cos 2\omega - \frac{2^4}{4}\sin^4\omega\cos 4\omega + \frac{2^6}{6}\sin^6\omega\cos 6\omega - \cdots$$

einander identisch gleich sind. Zur Probe beweist er auf anderem Wege

achtet die beiden allgemeineren Reihen

$$s = \frac{b \sin \omega}{1} - \frac{b^3 \sin 3\omega}{3} + \frac{b^5 \sin 5\omega}{5} - \frac{b^7 \sin 7\omega}{7} + \cdots$$

$$t = \frac{b^2 \cos 2\omega}{2} - \frac{b^4 \cos 4\omega}{4} + \frac{b^6 \cos 6\omega}{6} - \frac{b^8 \cos 8\omega}{8} + \cdots$$

gt, daß

$$s = \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 + 2b \sin \omega) - \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 - 2b \sin \omega)$$

$$t = \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 + 2b \sin \omega) + \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 - 2b \sin \omega)$$

her im Falle $b = 2 \sin \omega$

$$s = t$$

IV. DER BINOMISCHE SATZ. BINOMIALKOEFFIZIENTENFORMELN

Von den neun Abhandlungen, die in diesem Abschnitt besprochen werden solle
465 vom 1. Juli 1773

Demonstratio theorematis NEUTONIANI *de evolutione potestatum binomii pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri*

(*Opera omnia* I_{15}, p. 207—216) nicht nur zeitlich die erste; sie ist auch von ganz
derer Bedeutung und Schönheit. EULER weist einleitend darauf hin, daß ihm in den
tutiones calculi differentialis beim Beweise der für $|x| < 1$ gültigen Gleichung

$$(1) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots,$$

wo

$$(2) \qquad \binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu},$$

für den Fall eines beliebigen reellen Exponenten α ein Zirkelschluß unterlaufen ist. I
Abhandlung 465 geht er nicht von der in eine Potenzreihe zu entwickelnden Fun
$(1+x)^\alpha$ aus, sondern unter Annahme eines vorläufig festen x von der auf der rechten
von (1) stehenden Reihe, die er als Funktion φ von α betrachtet. Als bekannt darf er vo
setzen, daß für ganzzahliges $\alpha = n > 0$

$$(3) \qquad \varphi(\alpha) = (1+x)^n$$

ist; außerdem beweist er, daß die Funktion $\varphi(\alpha)$ der Funktionalgleichung

$$(4) \qquad \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$$

genügt. Mit leichten Ergänzungen der EULERschen Überlegungen schließt man au
und (4), daß für $|x| < 1$ und alle reellen α

$$\varphi(\alpha) = (1+x)^\alpha$$

sein muß.

Drei Jahre nach diesem sehr schönen Beweise für den allgemeinen binomischen Lehrgab EULER in der am 20. Mai 1776 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhand-637

Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii NEWTONIANI *etiam pro exponentibus fractis valeat*

omnia I_{16}, p. 112—121) einen zweiten Beweis, der als mißglückt bezeichnet werden Schon die von EULER als selbstverständlich gemachte Annahme, daß $(1+x)^\alpha$ sich in Reihe

$$\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$$

keln läßt, bedürfte eines Beweises, ebenso die Behauptung, daß alle Koeffizienten a_ν >0 den Faktor α haben. EULER macht dann den Ansatz

$$(1+x)^{\alpha+1} = \sum_0^\infty b_\nu x^\nu$$

acht aus den Gleichungen

$$b_\nu = a_\nu + a_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

rm der Koeffizienten a_ν abzuleiten.

n der Abhandlung 743 vom 20. Dezember 1779

De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest

omnia I_{16^*}, p. 162—177) macht EULER für $(1+x)^\alpha$ einen ganz anderen Reihennämlich

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = A + \alpha B + \alpha(\alpha-1)C + (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)D \\ + (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)E \\ + (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)F + \cdots\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $A, B, C, D, \ldots$ sind Funktionen von x, die EULER bestimmt, indem (5) nacheinander $\alpha = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$ usw. setzt. (Einfacher und htlicher ist es, ein bekanntes auf Differenzenrechnung beruhendes Interpolationsen zu benutzen.) Das Ergebnis ist die Reihe

$$+ \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\,\frac{x^2}{1+x} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{x^3}{1+x}$$

$$+ \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{x^5}{(1+x)^2}$$

$$+ \cdots,$$

die für $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ abbricht, im übrigen für $\left|\frac{x^2}{1+x}\right| < 1$ konvergiert, der aber von vornherein nicht feststeht, daß ihr Grenzwert $(1+x)^\alpha$ ist.

Dies beweist nun EULER hinterher auf geistvolle Weise. Er setzt

$$\frac{x^2}{1+x} = z,$$

erhält so für (5a) die Summe der beiden Reihen

$$s = 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}z + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{4!}z^3$$

$$+ \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{6!}z^3 + \cdots$$

und

$$u = \alpha x + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{3!}xz + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{5!}xz^2 + \cdots$$

und zeigt schließlich (sogar auf mehrere Weisen), daß

$$s = \frac{(1+x)^\alpha + (1+x)^{1-\alpha}}{x+2}, \quad u = \frac{(1+x)^{\alpha+1} - (1+x)^{1-\alpha}}{x+2},$$

mithin

$$s + u = (1+x)^\alpha$$

ist.

Die *übrigen* sechs Abhandlungen, auf die in diesem Abschnitt hingewiesen ist, handeln nicht sowohl von der Funktion $(1+x)^\alpha$ als von den Binomialkoeffizienten

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}.$$

Für diese führt EULER in der am 13. Mai 1776, also ungefähr gleichzeitig mit dem erwähnten zweiten Beweise der Gleichung (1) vorgelegten Abhandlung 575

De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque erecti occurrunt

(*Opera omnia* I_{15}, p. 528–568) das Zeichen $\left[\frac{\alpha}{\nu}\right]$ ein, das sich von dem heute üblichen fast nicht unterscheidet. Er leitet Formeln ab wie

$$\binom{\alpha}{\nu} + \binom{\alpha}{\nu-1} = \binom{\alpha+1}{\nu}$$

(6)
$$= \binom{p+n}{q+n} = \binom{p+n}{p-q}.$$

Aus (6) folgt für $p=n$, $q=0$ folgende an die Spitze der Abhandlung gestellte Gleic

$$(7)\qquad 1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\cdots\left(=\binom{2n}{n}\right)=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n},$$

die außerhalb des Zusammenhangs mitgeteilt etwas Verblüffendes hat. Für (7) gibt er einen anderen hübschen Beweis, der sich auf Überlegungen der Wahrscheinlichkeitsrech gründet.

EULER erkennt, daß das Produkt auf der rechten Seite von (7), wie auch der a meinere Ausdruck (6) sich durch Betafunktionen ausdrücken läßt; so findet er z. B. fü die Integraldarstellung

$$(8)\qquad \frac{1}{(q+n)\int\limits_0^1 x^{p-q}(1-x)^{q+n-1}\,dx},$$

die dann hinterher erlaubt, die auf der linken Seite von (6) stehende Funktion von p, auch für solche Fälle zu erklären, in denen p, q, n keine positiven ganzen Zahlen wobei freilich noch von EULER nicht ausdrücklich hervorgehobene Einschränkungen w der möglichen Divergenz des Integrals (8) zu machen wären. In dem besonderen Falle auf der linken Seite von (7) stehenden Summe $S(n)$ ergeben sich für $S\left(\frac{1}{2}\right)$, $S\left(\frac{3}{2}\right)$, S usw. Werte, die zu $\frac{1}{\pi}$ in rationalem Verhältnis stehen, z. B.

$$S\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{24}{7}\cdot\frac{32}{9}.$$

EULER fragt auch, welche Beziehung zwischen n, p, q stattfinden muß, wenn das tegral (8) in geschlossener Form auswertbar sein soll, und er findet so im Falle q $p=1-n$ aus (7), (8) die folgende Reihe

$$(9)\qquad 1-\frac{n^2}{1}+\frac{n^2(n^2-1)}{1\cdot 4}-\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1\cdot 4\cdot 9}+\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1\cdot 4\cdot 9\cdot 25}-\cdots=\frac{\sin}{n}$$

die für alle Werte von n konvergiert.[1])

---

1) Über die Entdeckungsgeschichte dieser Formel und ähnlicher siehe *Encyklopädie math. Wissenschaften* II$_{3,1}$, Leipzig und Berlin 1909—1920, S. 35. Vgl. auch die Anmerkung S. I

Die Abhandlungen 584 vom 2. September 1776

De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomioru

(*Opera omnia* I_{15}, p. 604—620) und 709 vom 6. Juli 1778

De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$$

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 28—40) beschäftigen sich mit den Koeffizienten der Reihe

$$1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$$

für eine Polynompotenz der Form $(1 + x + x^2 + \cdots + x^r)^n$ (n beliebig reell); Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten gefunden, darunter Verallgemeiner (6) und (7).

In der Abhandlung 663 vom 30. September 1776

Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomi

(*Opera omnia* I_{16}, p. 193—234) wird der Zusammenhang zwischen Reihen der F

$$1 + \binom{x}{0}\binom{y}{0} + \binom{x}{1}\binom{y}{1} + \binom{x}{2}\binom{y}{2} + \cdots$$

und ähnlichen Reihen einerseits und der Betafunktion andererseits vertieft u meinert; ein neuer Beweis für (6) wird in der Abhandlung 726 vom 17. Septen

Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomi

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 104—116) hergeleitet: von dem Produkte

$$\frac{z^q}{(1-z)^{q+1}} \cdot \left(1 + \frac{z}{1-z}\right)^p$$

wird zuerst der zweite Faktor nach Potenzen von $\frac{z}{1-z}$ entwickelt; dann wird Produkt in eine Reihe nach Potenzen von z umgeordnet; doch nimmt EULER reichende Begründung den zunächst nur unter Beschränkungen für p, q, n gült allgemeiner in Anspruch.

In der Abhandlung 768 endlich, die am 3. Dezember 1781 der Akadem worden ist und die den Titel hat

De unciis binomii earumque interpolatione

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 241—266), geht EULER von der für ganze positive n, q o

(und für beliebige reelle n bei ganzen $q > 0$ leicht zu bestätigenden) Formel

$$\binom{n}{q} = \frac{[n]}{[q][n-q]}$$

und verwendet sie, um das Zeichen $\binom{n}{q}$ allgemein für reelle n, q zu definieren. Er Sätze ab wie diesen:

Die Ausdrücke

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-a}\,dx \cdot \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{n-a-b}\,dx \cdot \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{n-a-b-c}\,dx$$

ihren Wert nicht, wenn man die Buchstaben a, b, c untereinander beliebig vertauscht. erden auch Formeln angegeben, welche die Berechnung von $\binom{p}{q}$ auf die Fälle zurück-, in denen p und q zwischen 0 und 1 liegen. Auch wird der Verlauf der auf rechtige Koordinaten x, y bezogenen Kurven $y = \binom{m}{x}$ für ganzzahlige Werte von m untersucht.

V. BESONDERE REIHEN UND FUNKTIONEN

In der Abhandlung 72

Variae observationes circa series infinitas

(*Opera omnia* I14, p. 216—244), die **Euler** am 25. April 1737 der Petersburg
vorgelegt hat, bestimmt er die Summen sehr merkwürdiger Reihen der Form

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu}, \tag{1}$$

wo die n_ν ganze (positive oder negative) Zahlen sind. Den Ausgangspunkt
Reihensummation, die Chr. Goldbach brieflich an Euler samt Beweis mitge
nämlich

$$1 = \sum_{\mu,\nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{\mu^\nu - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots \tag{2}$$

Der Beweis benutzt divergente Reihen, läßt sich aber mit Erhaltung des Gr
richtig machen, wie überhaupt alle Ergebnisse dieser Abhandlung 72 richtig si
lichen Überlegungen wie bei (2) leitet Euler noch weitere Reihensummen ab,

$$\sum_{\mu,\nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{(2\mu - 2)^\nu - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \cdots$$

$$= \log 2$$

$$\sum_{\mu,\nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{(2\mu - 1)^\nu - 1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \cdots$$

$$= 1 - \log 2$$

$$\sum_{\mu \geqq 2, \nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{\mu^\nu - 1} = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \cdots$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

---

1) Vgl. die Anmerkung I14, p. 216. Weitere Literatur über diese Goldbach
verwandte Reihen, siehe *Encyklopädie der math. Wiss.*, Bd. II_1, S. 180, wo übrigens
bach noch Euler erwähnt wird.

tzte dieser Beispiele war EULER auch von GOLDBACH mitgeteilt worden, doch ohne , für den EULER die von ihm entdeckte Gleichung

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$$

t.

Im *zweiten Teil der Abhandlung* 72 leitet EULER andere Reihen der Form (1) ab, nmehr die n_ν Primzahlen sind oder doch die Primfaktorenzerlegung der n_ν eine Rolle Er beweist zunächst die späterhin für die Theorie der RIEMANNschen Zetafunktion ichtig gewordene Identität[1])

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^s}=\prod_1^\infty \left(1-\frac{1}{p_\nu^s}\right)^{-1},$$

p_ν die Primzahlen bedeuten ($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, …). Da er den Wert der auf ken Seite von (3) stehenden Funktion $\zeta(s)$ für $s=2, 4, 6, \ldots$ kennt, gelangt er zu erten von vielen unendlichen Produkten, z. B. (Theorema 9):

Bringt man für $\nu=2, 3, 4, \ldots$ die Primzahlquadrate p_ν^2 auf die Form

$$p_\nu^2=2q_\nu+(2q_\nu+1)\quad (\text{also } 9=4+5,\ 25=12+13,\ 49=24+25,\ \ldots),$$

$$\prod_2^\infty \frac{2q_\nu+1}{2q_\nu}=\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdot\frac{145}{144}\cdots=\frac{3}{2};$$

(Theorema 12): Zerlegt man für $\nu\geqq 2$ die Primzahlen p_ν in zwei Summanden $r_\nu+s_\nu$, Differenz $|s_\nu-r_\nu|=1$ ist und von denen r_ν eine gerade, s_ν eine ungerade Zahl ist,

$$\prod_2^\infty \frac{r_\nu}{s_\nu}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots=2.$$

leren von EULER mitgeteilten Reihensummen ist sein Beweis unvollständig und kann t tiefer liegenden Überlegungen der Primzahlentheorie, für die diese Reihen von Be- g geworden sind, richtig gemacht werden; hierzu gehören die Summationen[2])

$$\frac{(\nu)\lambda(\nu)}{\nu}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\cdots=\frac{\pi}{2}\quad(\text{Theorema 15})$$

) Auch *Introductio* § 283 (*Opera omnia* I8, p. 299).

) Vgl. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und 1909, Bd. 2, S. 571 und 673.

und

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda(\nu)}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \cdots = 0 \quad (\mathrm{T}$$

[Dabei ist $\lambda(1) = 1$, $\lambda(\nu) = (-1)^{\varrho}$ für ein aus ϱ Primfaktoren (mehrfache m
zusammengesetztes ν; $\chi(\nu)$ ist Null für gerades ν, $+1$ für $\nu = 4\mu + 1$, -1 f

Den Schluß der Abhandlung 72 bildet eine Bemerkung EULERS, die m
Schreibweise etwa so fassen würde:

$$\sum_{p_\nu < [x]} \frac{1}{p_\nu} = \log \log x + O(1)$$

(vgl. LANDAU, a. a. O. Bd. I, S. 102; $[x]$ bedeutet in dieser Formel die größte
ganze Zahl).

In der Abhandlung 247

De seriebus divergentibus

(*Opera omnia* I14, p. 585—617), die am 27. Oktober 1746 der Berliner un
1753 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist, setzt EULER ausführ
drücklich seine Meinung über den Gebrauch divergenter Reihen auseinander

Über diese grundsätzlichen Fragen wurde in der Einleitung dieser Üb
lich berichtet. Es bleibt daher nur noch übrig, auf die besonderen Beispiele
denen EULER in der Abhandlung *de seriebus divergentibus* seine allgemeine T

Noch ehe diese Abhandlung 1760 im Drucke erschienen war, hatte e
tutiones calculi differentialis[1]) durch die Substitution

$$x = \frac{z}{2 - z}, \quad z = \frac{2x}{1 + x}$$

die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} a_\nu x^\nu \text{ in eine Reihe } \sum_{0}^{\infty} b_\nu \left(\frac{2x}{1+x}\right)^\nu$$

transformiert, und er hatte bemerkt, daß die Reihe $\sum_{0}^{\infty} b_\nu$ konvergieren
die Reihe $\sum_{0}^{\infty} a_\nu$ zu konvergieren braucht. In solchen Fällen betrachtet er di
$\sum_{0}^{\infty} b_\nu$ als Summe der divergenten Reihe $\sum_{0}^{\infty} a_\nu$.

---

1) *Partis posterioris caput I: De transformatione serierum; Opera omnia* I

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu = \frac{1}{2}, \qquad \sum_0^\infty (-1)^\nu \nu = \frac{1}{4},$$

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu \nu^2 = 0, \qquad \sum_0^\infty (-1)^\nu 3^\nu = \frac{1}{4}$$

summiert werden können, und versucht es dann auf die den hauptsächlichen Gegenstand d Abhandlung 247 bildende hypergeometrische Reihe[1])

$$(4) \qquad 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \cdots$$

anzuwenden, die er als Wert der Funktion

$$(5) \qquad s(x) = x - x^2 + 2!\ x^3 - 3!\ x^4 + 4!\ x^5 - 5!\ x^6 + \cdots$$

an der Stelle $x = 1$ ansieht. Da er (was uns heute nicht wundern kann) zu keinem Erfo *gelangt*[2]), betrachtet er die Reihe (4) als Wert für $x = 0$ einer ganz anderen Funktio *nämlich als* Summe der Interpolationsreihe

$$\varphi(x) = 1 + (x-1) + (x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3) + \cdots$$

für $x = 0$. Er bildet die Werte

$$\frac{1}{\varphi(1)}, \quad \frac{1}{\varphi(2)}, \quad \frac{1}{\varphi(3)}, \quad \cdots$$

und versucht nach den Regeln der Differenzenrechnung die Funktion $\frac{1}{\varphi(x)}$ *in eine Inte* polationsreihe

$$(6) \qquad \frac{1}{\varphi(x)} = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) + c_3(x-1)(x-2)(x-3) + \cdots$$

1) Wegen dieser Bezeichnung vgl. S. XLI.

2) Allerdings gelangt EULER zu der Näherung 0,58 des richtigen Wertes 0,596...; abe bei anderer Anordnung der Rechnung, insbesondere, wenn er die benutzte Reihe an einer spätere oder früheren Stelle abgebrochen hätte, wäre die Annäherung schlechter ausgefallen, so daß di *Vermutung erlaubt ist*, die gefundene Näherung sei nicht unbeeinflußt durch die Kenntnis des au anderem Wege (vgl. oben (8), (9)) gefundenen richtigen Wertes. EULER *bezeichnet selbst dies* seine erste Methode als nicht recht geeignet (non satis aptam) für eine genauere Berechnung. De soeben gemachte Einwand gilt auch für die beiden nächsten Berechnungen, welche die oben mi $\varphi(x)$ bezeichnete Funktion benutzen und ungefähr die gleiche Genauigkeit wie die erste erreichen EULER selbst hat sich diesen Einwand gemacht (vgl. I_{14}, S. 600, erste und folgende Zeilen) un schließlich auch die beiden von $\varphi(x)$ ihren Ausgang nehmenden Wege verwerfen („haec methodu *non satis est certa*"; *„hoc modo neque satis tuto neque satis commode ad cognitionem valoris A* *perveniri potest*").

zu entwickeln. Die Hoffnung, den gesuchten Summenwert der Reihe als d
rechten Seite von (5) zu gewinnen, scheitert an der Divergenz der Reihe
ergeht es beim Versuch, $\log \varphi(x)$ statt $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine Reihe der Form (6)
Nach diesen Fehlschlägen kehrt EULER wieder zu der Reihe (5) zurück u
sie formal der Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dx} + \frac{s}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$$

genügt und daß andererseits

$$s(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}} dt}{t} \tag{7}$$

das für $x = 0$ verschwindende Integral dieser Differentialgleichung ist.[1]
und (7) $x = 1$ setzt, kommt EULER zu der Gleichung

$$\begin{aligned} & 1 - 1 + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots \\ & = e \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Das auf der rechten Seite von (8) stehende Integral berechnet er n
trapezverfahren, wobei er die Strecke $0 \ldots 1$ in 10 gleiche Teile teilt, a
denen vier richtig sind.

Zu einer zweiten Summierung der Reihe (5) gelangt EULER noch a
sehr merkwürdigen Wege: Er erkennt, daß diese divergente Reihe sich e
den Kettenbruch

$$\cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cdots}}}}}}}}}} \tag{9}$$

---

1) Daß tatsächlich $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}} dt}{t}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0$ ist, wird von EULER nicht ausdr
folgt aber leicht aus der sog. DE L'HOSPITALschen Regel.

besseren Näherungswert

$$0{,}596347362\,1372,$$

der auf neun Dezimalstellen richtig ist.[1])

Zum Schlusse der Abhandlung 247 verallgemeinert EULER die zwischen der Reihe (
und dem Kettenbruch (9) gefundene Beziehung, indem er zeigt, daß der konvergen
Kettenbruch

$$(10)\qquad \cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\cfrac{3nx}{1+\cfrac{(m+3n)x}{1+\cfrac{4nx}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

nach Potenzen von x entwickelt die divergente Reihe

$$(11)\qquad \begin{aligned} &1-mx+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3\\ &\quad+m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4-\cdots \end{aligned}$$

liefert. Er setzt insbesondere $m=1$, $n=2$, $x=1$ und bestimmt durch den sich so ergeben
den Wert des Kettenbruchs (10) die Summe der Reihe

$$1-1+1\cdot 3-1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9+\cdots$$

zu 0,65568.

Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Kettenbruch (10) und de
Reihe (11) wird wiederholt in der Abhandlung 616 vom 11. Januar 1776

De transformatione seriei divergentis

$$1-mx+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3+m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4-\text{etc.}$$

in fractionem continuam

(*Opera omnia* I_{16}, p. 34—46).

1) Vgl. *Institutiones calculi differentialis, partis posterioris caput I; Opera omnia* I_{10}, insbesondere auch die Anmerkung 2, p. 226.

(In einem Anhang zu dieser Arbeit wird der BROUNCKERsche Kettenbruch[1]) fi

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}}$$

in die LEIBNIZsche Reihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

umgeformt, als deren erster Entdecker mit Recht GREGORY genannt wird.)

Die drei Abhandlungen 326 vom 21. Dezember 1763

Observationes analyticae

(*Opera omnia* I15, p. 50—69), 551 vom 18. Mai 1772

Varia artificia in serierum indolem inquirendi

(*Opera omnia* I15, p. 383—399) und 722 vom 17. August 1778

Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1+x+xx)^n$

(*Opera omnia* I16*, p. 56—103) behandeln eine und dieselbe Aufgabe, nämlich die fo
α_n sei der Koeffizient von x^n in dem Polynome, das gleich $(1+x+x^2)^n$ ist $(n=0,1,2,$
$\beta_{n-\nu}$ sei in dem nämlichen Polynome der Koeffizient von $x^{n-\nu}$ (und damit zugleic
$x^{n+\nu}$) $(\nu \leqq n)$; es handelt sich dann darum, welche Funktionen dargestellt werden
die Reihen

$$\sum_0^\infty {}^\mu\, \alpha_\mu x^\mu, \quad \sum_0^\infty {}^\mu\, \beta_\mu x^\mu.$$

Das Ergebnis, das sich vollständig schon in der ersten der drei genannten A
findet, lautet

$$\sum_0^\infty {}^\mu\, \alpha_\mu x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}},$$

$$\sum_\nu^\infty {}^\mu\, \beta_{\mu-\nu} x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}}\left(\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}\right)^\nu.$$

In dieser Arbeit löst EULER auch noch folgende allgemeinere Aufgabe: Welcl
wenn γ_n der Koeffizient von x^n in dem nach Potenzen von x entwickelten Pol

1) Vgl. S. VII.

$$\sum_0^{\mu} \gamma_\mu x^\mu ?$$

Die Antwort lautet:

$$\sum_0^{\infty} \gamma_\mu x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2bx + (b^2 - 4ac)x^2}}.$$

Die beiden anderen Arbeiten 551 und 722 bringen keine neuen Ergebnisse, unt scheiden sich aber (besonders 722) in der Beweisführung von 326.

In den drei erwähnten Abhandlungen steckt viel bewundernswerter echt EULERsch Scharfsinn; es ist nicht anzunehmen, daß unter den heutigen Mathematikern viele find genug sind, um die Sätze von 326 beweisen zu können. Wenn trotzdem diese EULERsche Untersuchungen keinen Platz in der Geschichte der Mathematik gefunden haben, so liegt darin, daß sie abseits außer Zusammenhang mit den großen Fragen der Wissenschaft stehe und daher mehr den Eindruck einer sehr geistreichen Spielerei machen. Den gleichen Ei druck machte wohl ein Jahrhundert lang die im Jahre 1749 in der Berliner Akademie g lesene, aber erst 1768 gedruckte Abhandlung 352

Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques

(*Opera omnia* I15, p. 70—90), bis dann RIEMANN in seiner berühmten 1859 in den Monat berichten der Berliner Akademie erschienenen Arbeit

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

(Werke, 2. Auflage, Leipzig 1892, S. 145—153) ohne Kenntnis der EULERschen Abhan lung[1]) den gleichen Gegenstand aufgriff, der von da an immer mehr in den Vordergrun mathematischer Forschung rückte. Das Ergebnis der Abhandlung 352 ist die Funktiona gleichung der Funktion[2])

$$\zeta(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

1) Auf die ganz vergessene Leistung EULERS hat erst im Jahre 1894 CAHEN im Band 113 der Pariser *Annales de l'école normale* aufmerksam gemacht. Herr E. LANDAU hat dann i Bande 73 der *Bibliotheca mathematica* 1906—1907, S. 69—79 auf die große Bedeutung de EULERschen Abhandlung 352 hingewiesen und die EULERschen Ansätze hinsichtlich der Streng der Beweisführung ergänzt. Heute kann man dasselbe schneller erreichen.

2) Unter $\zeta(s)$ möge ganz im Sinne EULERS nicht nur die auf der rechten Seite der obige Gleichung stehende Reihe, soweit sie konvergiert, verstanden werden, sondern zugleich die durc analytische Fortsetzung dieser Reihe sich ergebende meromorphe Funktion. Ebenso bedeute $\varphi(s$ die durch die Reihe auf der rechten Seite von (12) definierte ganze Funktion, gleichviel ob fü

oder eigentlich die damit gleichbedeutende Funktionalgleichung der Funktion

(12) $\varphi(s) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\zeta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} +$

Diese Funktionalgleichung lautet

(13) $$\frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)} = -\frac{[s-1](2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s}\cos\frac{s\pi}{2};$$

dabei bedeutet $[s-1]$ die EULERsche später mit $\Gamma(s)$ bezeichnete Funktion.[1])

Der EULERsche Gedankengang läßt sich in heutiger Bezeichnungsweise etwa
stellen.

Daß

(13a) $$\varphi(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2^{2k-1}-1)B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}$$

ist ($k = 1, 2, 3, \ldots$), hatte EULER schon früher bewiesen (s. den 1. Abschnitt die
richtes). Andrerseits erhielt er für $s = -k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) divergente Reihen,
summieren konnte[2]):

(14) $$\sum_{0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^k = \frac{(-1)^{k+1}(2^{k+1}-1)}{k+1}B_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2$$

Dabei war die linke Seite von (14) zunächst erklärt als Wert für $x = 1$ de
die Potenzreihe

(14a) $$f_k(x) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^k x^\nu$$

definierten rationalen Funktion. Da sowohl $f_k(1)$ wie $\varphi(-k)$ durch die divergent
auf der linken Seite von (14) dargestellt werden, erschien für EULER die G
$f_k(1) = \varphi(-k)$ selbstverständlich; der in Wirklichkeit notwendige Beweis ergibt sic
daraus, daß einerseits die ganze Funktion $\varphi(s)$ für jeden beliebigen Wert s insb
für $s = -k$ durch CESÀROsche Summation aus der Reihe auf der rechten Seite v
berechnet werden kann und daß andererseits $f_k(1)$ aus der Reihe auf der rechten S
(14a) mit $x = 1$ nach dem gleichen Verfahren gewonnen werden kann.

---

einen gerade angenommenen Wert s diese Reihe konvergiert oder nicht; und $f_k(x)$ sei die
Funktion (mit dem Pole -1), die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe auf der rechten S
(14a) dargestellt wird.

1) Vgl. S. XLI.

2) Vgl. S. XXVIII, wie auch S. XIII und die Anmerkung 4 daselbst.

Die auf der rechten Seite von (14) angegebenen Zahlenwerte für $f_k(1) = \varphi(-$ hatte EULER in den Fällen $k = 1, 2, 3, \ldots, 6$ zunächst dadurch gefunden, daß er die Funk-tionen $f_k(x)$ wirklich bildete, z. B.

$$f_6(x) = \frac{1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7}$$

und $x = 1$ einsetzte (I_{15}, p. 72, z. T. schon vorher *Inst. calc. diff. partis posterioris caput* *Opera omnia* I_{10}, p. 217). Um aber (14) allgemein für jedes ganzzahlige $k > 0$ zu beweisen schlug er in E 352 einen außerordentlich kühnen Weg ein: Er setzte in der Formel (2 von S. X $f(x) = x^k$, wodurch die rechte Seite zu einer endlichen Summe ohne Restglie wird; dann wählte er $a = 0$, $h = 1$, ließ links n unendlich werden und rechts alles weg was von $b = a + mh$, d. h. also von m abhing; so bekam er (14) aus jener Formel (2a).

1) In den *Institutiones calculi differentialis partis posterioris caput I* (*Opera omnia* I p. 217) macht EULER, nachdem er erkannt hatte, daß die rekurrenten Reihen $\sum\limits_0^\infty (-1)^{\nu+1}\nu^k x$ rationale für $x = 1$ endlich bleibende Funktionen darstellen, einen Beweisansatz, der zwar nich zu dem allgemeinen Gesetze (14) führte, aber doch erlaubte, die Reihen (14) für jedes einzelu k zu summieren. Er zeigte: die Teilsummen $S_1 = 1^k$, $S_2 = 1^k - 2^k$ usw. der Reihe (14) lasse sich mittels eines gewissen Polynoms $P_k(x)$ vom Grade k so darstellen: $S_n = C_k \mp P_k(n)$, w C_k eine Konstante ist und das obere Zeichen für gerades, das untere für ungerades n gilt. EULE schließt nun so: $n = \infty$ ist weder gerade noch ungerade, also ist S_∞, d. h. die Summe der un endlichen Reihe (14), gleich C_k. Der EULERsche Ansatz läßt sich leicht zu einem vollen Be weise vervollständigen: Ist $\varphi_{k+1}(x)$ das BERNOULLIsche Polynom der Ordnung $k+1$, so is offenbar für gerade n:

$$S_n = \varphi_{k+1}(n+1) - 2^{k+1}\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

für ungerades n:

$$S_n = \varphi_{k+1}(n+1) - 2^{k+1}\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Benutzt man zur Umformung dieser Gleichung das sogen. Multiplikationstheorem der BERNOULLI schen Polynome ($k > 0$)

$$\varphi_{k+1}(x) = 2^k\left(\varphi_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_{k+1}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{2^{k+1}-1}{k+1}B_{k+1},$$

so erhält man die von EULER gefundene Gleichung für S_n in der folgenden genaueren Form:

$$S_n = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}B_{k+1} \mp 2^k\left(\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+1\right) - \varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right),$$

wo wieder das obere Zeichen für gerades, das untere für ungerades n gilt. Man erkennt leicht daß bei der Bildung der HÖLDERschen Mittel der S_n nur der erste Summand $\frac{2^{k+1}-1}{k+1}B_{k+}$ von Bedeutung wird, woraus (14) folgt.

Die Gleichungen (13a) und (14) für die Funktionswerte $\varphi(2k)$ m
die Richtigkeit der Funktionalgleichung (13) für $s = 2, 3, 4, \ldots$ Dann
beiden Seiten von (13) noch den Grenzübergang $s \to 1$ und findet so l
$-\frac{\pi}{2 \log 2}$, und ebenso findet er beiderseits durch den Grenzübergang $s \to$ (
Nachdem so die Richtigkeit der Gleichung (13) noch für $s = 1$ und s =
wird sie mittels der bekannten für die Gammafunktion geltenden Gleichu

$$[\lambda][-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\sin \lambda\pi}$$

auf alle ganzzahligen $s \left(\gtrless 0\right)$ ausgedehnt.

Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Richtigkeit von (13) sofort, da $\Big[-$
Fall $s = \frac{3}{2}$ aber wird von Euler durch Zahlenrechnung nachgeprüft: di
sofort den Wert

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0{,}496773 \ldots;$$

für die linke Seite aber errechnet Euler einen Zahlenwert, der mit di
5 Stellen übereinstimmt, indem er folgendermaßen vorgeht: er definiert
divergente Reihe

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \cdots,$$

berechnet die Summe der ersten 9 Glieder und den Rest mittels seiner
demselben kühnen Wege, auf dem er die Gleichung (14) abgeleitet hatt

Nach der Feststellung, daß die Funktionalgleichung (13) für all
sagt Euler, man könne an ihrer Allgemeingültigkeit nicht mehr zweife
klar darüber, daß er keinen vollen Beweis geliefert hat.

Euler betrachtet auch die Funktion

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)^s}$$

und spricht die Vermutung aus, daß sie der Funktionalgleichung[2])

$$\frac{\psi(-s+1)}{\psi(s)} = \frac{[s]\, 2^s}{\pi^s} \cdot \sin \frac{s\pi}{2}$$

---

1) Die Eulerschen Ausführungen zu einem den heutigen Anforderu
weise auszugestalten wäre eine lohnende Übungsaufgabe.

2) Diese Funktionalgleichung wurde mit der Beschränkung auf positiv
von Malmsten wiedergefunden und bewiesen: *Specimen analyticum etc.*, Up

Cette conjecture renferme une expression plus simple que la précédente; donc, puisqu'el[le] est également certaine, il y a à espérer qu'on travaillera avec plus de succès à en chercher un[e] démonstration parfaite, qui ne manquera pas de répandre beaucoup de lumiere sur quanti[té] d'autres recherches de cette nature.

EULERS Hoffnung, mittels der Funktionalgleichung (13) zur Summation der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{3^{2k+1}} - \frac{1}{4^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} \cdots$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$, d. h. also zur Ermittelung der Funktionswerte $\varphi(2k+1)$ zu gelange[n], erwies sich als trügerisch, da diese Funktionswerte vermöge (13) in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen[;] er wandte zwar am Schluß der Abhandlung 352 auf diese Ausdrücke die sogenannt[e] DE L'HOSPITALsche Regel an und gelangte zu Gleichungen wie

$$(15)\qquad \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots &= -\frac{3\pi^2}{7}(1\log 1 - 2^2\log 2 + 3^2\log 3 - 4^2\log 4 + \cdots) \\ 1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots &= \frac{5\pi^4}{4\cdot 31}(1\log 1 - 2^4\log 2 + 3^4\log 3 - 4^4\log 4 + \cdots) \end{aligned}$$

usw.,

oder (nach leichter Umformung)

$$(15a)\qquad 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^2}{2}(2^2\log 2 - 3^2\log 3 + 4^2\log 4 - \cdots) \quad \text{usw.,}$$

doch ließen sich daraus keine weiteren Schlüsse ziehen.

---

integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. 3[8] (1849), S. 17. Im gleichen Jahre 1849 stellte auch SCHLÖMILCH mit der nämlichen Beschränkun[g] diese Funktionalgleichung auf, um sie dann 1858 zu beweisen: *Lehrsatz*, Archiv d. Math. [u.] Phys. 12 (1849), S. 415; *Über eine Eigenschaft gewisser Reihen*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. [3] (1858), S. 130. Weder von MALMSTEN noch von SCHLÖMILCH wird EULER erwähnt. Im Jahre 187[7] hat dann SCHLÖMILCH wieder unter der Voraussetzung $0 < s < 1$ die EULERsche Funktionalgleichun[g] (13) für $\varphi(s)$, die mit der für $\zeta(s)$ gleichbedeutend ist, bewiesen (offenbar ohne Kenntnis der Vo[r]gängerschaft EULERS und RIEMANNS): *Über die Summen von Potenzen der reziproken natürliche[n] Zahlen*. Ber. der Sächs. Ges. d. Wiss., math. Kl., 29 (1877), S. 106; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2[3] (1878), S. 135. Die oft wiederholte und auf einer Verwechselung beruhende irrtümliche Behau[p]tung, SCHLÖMILCH habe schon 1849 und 1858 die EULERsche Funktionalgleichung (13) für $\varphi(s)$ wiedergefunden und bewiesen, wurde von LANDAU in der S. XXXI Anm. 1 erwähnten Arbeit berichtig[t].

Die Untersuchungen der Abhandlung 352 werden wieder aufgenommen und
wiederholt in der Abhandlung 432 vom 18. Mai 1772

Exercitationes analyticae

(*Opera omnia* I_{15}, p. 131—167); insbesondere aber werden die Bemühungen um die (15), (15a) mit großem Nachdruck, aber ohne endgültigen Erfolg fortgesetzt. Die e dieser Reihen, nämlich (15a), unterwirft EULER mit dem ganzen Aufwand seiner ei stehenden Rechenkunst („*calculis admodum ingeniosis*", wie es im *Summarium* heißt wieder neuen Umformungen, ohne das erwünschte Ziel zu erreichen. Im einzelnen k über diese sehr geistvollen vergeblichen Bemühungen nicht berichtet werden; als sei nur folgende Integraldarstellung angegeben:

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^2}{4}\log 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\ \operatorname{logsin}\varphi\, d\varphi.$$

In der Abhandlung 453 vom 23. November 1773

Insignes proprietates serierum sub hoc termino generali contentarum

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p+q\sqrt{k})^n+\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p-q\sqrt{k})^n$$

(*Opera omnia* I_{15}, p. 185—206) untersucht EULER den in der Überschrift mit x neten Ausdruck, für den er auch abkürzend fv^n+gu^n oder noch kürzer $[n]$ schrei verschiedenen Richtungen hin; wir wollen im folgenden, um Verwechslungen mit zu vermeiden, $f(n)$ schreiben. EULER beweist die Rekursionsformel

$$f(n+2)=2pf(n+1)-rf(n),$$

wo r soviel bedeutet wie p^2-kq^2, ferner Formeln wie z. B.

$$f(n+1)=pf(n)+q\sqrt{kf(n)^2-(ka^2-b^2)r^n}.$$

Die weiter von ihm mitgeteilten Formeln, die v^l+u^l durch p und r ausdrück

$$v^6+u^6=64p^6-96p^4r+36p^2r^2-2r^3$$

sind verwandt mit den Formeln, die $\cos n\varphi$ durch die Potenzen von $\cos\varphi$ ausdrüc gehen in diese über, wenn $p=\cos\varphi$, $q=\sin\varphi$, $k=-1$ gesetzt wird. Neben der

$$x=f(n)=f\cdot v^n+g\cdot u^n$$

betrachtet EULER noch eine zweite ähnlich gebaute

$$y=\varphi(n)=\xi\cdot v^n+\eta\cdot u^n,$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right).$$

Er zeigt, daß zwischen x und y identisch die quadratische Gleichung besteht

$$(\alpha^2 k - \beta^2)x^2 - 2(a\alpha k - b\beta)xy + (a^2 k - b^2)y^2 + (a\beta - \alpha b)^2 r^n = 0,$$

vergleicht sie mit der allgemeinen Gleichung

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dr^n = 0,$$

für diese Lösungen x, y zu gewinnen. Die Abhandlung mündet so schließlich ins entheoretische, wie auch die beiden ihr benachbarten Abhandlungen 452 und 454 sich Zahlentheorie beschäftigen.

In der Abhandlung 477 vom 4. Juli 1771

Meditationes circa singulare serierum genus

ra omnia I_{15}, p. 217—267) untersucht EULER die Reihen

$$s_{m,n} = 1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$$

$$+ \frac{1}{4^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) + \cdots \qquad (m, n \text{ ganzzahlig} > 0)$$

vergleicht sie mit den Reihen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots \qquad (n \text{ ganzzahlig} > 0),$$

n in den Fällen $n = 2, 4, 6, \ldots$ bekannte Werte an passenden Stellen zur Probe herangen werden.

Er zeigt zuerst, daß

$$s_{n,n} = \frac{1}{2} s_n^2 + \frac{1}{2} s_{2n}$$

daß

$$s_m s_n - s_{m+n} = \sum_{\mu, \nu > 0}\left(\frac{1}{\mu^m}\frac{1}{(\mu+\nu)^n} + \frac{1}{\mu^n}\frac{1}{(\mu+\nu)^m}\right)$$

sodann zerlegt er die auf der rechten Seite von (18) vorkommenden rationalen Funkn von μ (bei konstant gehaltenem ν)

$$\frac{1}{\mu^m(\mu+\nu)^n}, \quad \frac{1}{\mu^n(\mu+\nu)^m}$$

artialbrüche; dadurch gelingt es ihm, die rechte Seite von (18) als eine Summe von

Reihen der Art (16), (17) darzustellen und eine unübersehbare Fülle
zwischen solchen Reihen aufzustellen, von denen hier als Beispiele nur
die Reihen $s_{m,n}$, bei denen $m+n=6$ ist, Platz finden mögen:

$$s_{5,1} = 3\,s_4 s_2 - \frac{1}{2}\,s_3^2 - \frac{7}{2}\,s_6,$$

$$s_{4,2} = -\frac{16}{3}\,s_4 s_2 + s_3^2 + 9\,s_6,$$

$$s_{3,3} = \frac{1}{2}\,s_3^2 + \frac{1}{2}\,s_6,$$

$$s_{2,4} = \frac{19}{3}\,s_4 s_2 - s_3^2 - 8\,s_6.$$

Bei der Abhandlung 489 vom 12. Juni 1777

De formulis exponentialibus replicatis

(*Opera omnia* I_{15}, p. 268—297) handelt es sich um folgende Iteratio
irgendeine positive, α irgendeine reelle Zahl ist, werden folgende Zahlen
bildet:

$$f_1 = r^{\alpha}, \quad f_2 = r^{f_1}, \quad f_3 = r^{f_2}, \ \ldots, \ f_{n+1} = r^{f_n}, \ \ldots$$

Die Frage ist: Was kann man über die Existenz eines Grenzwer
Zur Veranschaulichung wird die Kurve mit der Gleichung $y = r^x$ in
naten x, y herangezogen. Da der Fall $r = 1$ bedeutungslos ist, hat man

$$\text{I. } r > 1, \quad \text{II. } r < 1$$

zu unterscheiden. Der I. Fall enthält die drei Unterfälle

$$\text{I a) } r < e^{\frac{1}{e}}, \quad \text{I b) } r = e^{\frac{1}{e}} = 1{,}44467, \quad \text{I c) } r > e^{\frac{1}{e}}.$$

Im Falle I a) hat die Gleichung $r^x = x$ zwei Lösungen x_1 und x
gesprochen: die Kurve $y = r^x$ wird von der Geraden $y = x$ in zwei P
ist dann $\alpha < x_2$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x_1$; ist aber $\alpha = x_2$, so ist $f_1 = f_2 = f_3$
also auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x_2$; ist endlich $\alpha > x_2$, so wird $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

Im Falle I b) hat die Gleichung $r^x = x$ die eine Lösung $x = e$
wird von der Geraden $y = x$ berührt); ist $\alpha \leqq e$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = e$; is
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

Im Falle I c) hat die Gleichung $r^x = x$ keine Lösung und es ist

$$x_1 = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad x_2 = p^{\frac{p}{p-1}}, \quad \log r = p^{-\frac{1}{p-1}} \frac{\log p}{p-1}.$$

ährend also bei gegebenem r zur Bestimmung von x_1 und x_2 die Auflösung einer ndenten Gleichung nötig ist, kann man mittels des Parameters p, der > 1, aber sonst lich anzunehmen ist, vermöge (19) x_1, x_2, r sehr einfach ausdrücken (z. B. $p = 2$, , $x_1 = 2$, $x_2 = 4$).

n Falle II: $r < 1$ hat die Gleichung $r^x = x$ stets eine einzige Lösung ξ; es sind dann nterfälle zu unterscheiden:

$$\text{II a)} \quad r \geqq e^{-e}, \qquad \text{II b)} \quad r < e^{-e}.$$

n Falle II a) ist stets $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ vorhanden und gleich jener Zahl ξ, die der Gleichung genügt.

n Falle II b) gibt es zwei positive Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$r^{x_1} = x_2, \quad r^{x_2} = x_1$$

ngt man $\log r$ mittels des Parameters $p = x_2 : x_1$ auf die Form

$$\log r = p^{\frac{p}{p-1}} \frac{\log p}{1-p},$$

t

$$x_1 = p^{\frac{p}{1-p}}, \quad x_2 = p^{\frac{1}{1-p}}.$$

ie der Gleichung $r^\xi = \xi$ genügende Zahl ξ ist $> x_1$ und $< x_2$; falls $\alpha = \xi$, ist h

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \xi.$$

ber $\alpha > \xi_2$ ist, wird $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n+1} = x_2$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n} = x_1$, während für $\alpha < \xi_1$ umgekehrt $_{+1} = x_1$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n} = x_2$ wird.

ie Abhandlung 507 vom 6. November 1777

De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum

omnia I16, p. 298—313) bringt Überlegungen, die heute jedem Mathematiker ganz sind, wie

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \infty \quad \text{für } \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0 \text{ usw.}$$

Es wird bemerkt, daß man unendlich viele immer stärker und schwächer Ordnungen des Null- und Unendlichwerdens herstellen kann. Zum Schluß wird Einfluß des Differenzierens auf die Größenordnung eines Ausdrucks hingewiesen, z. daß für kleine positive x der Differentialquotient von $x^a\left(\log\frac{1}{x}\right)^m$ ($a>0$, m belie einem relativ kleinen Fehler

$$a x^{a-1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^m$$

ist, daß daher auch für kleine x näherungsweise

$$\int_0^x x^a\left(\log\frac{1}{x}\right)^m dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\log\frac{1}{x}\right)^m$$

ist.

Die kurze Abhandlung 565 vom 16. Oktober 1775

De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet

(*Opera omnia* I_{16}, p. 522—527) enthält nicht sowohl Einzelausführungen als vieln Bemerkung grundsätzlicher Art: es wird darauf hingewiesen, daß aus den rational tionen durch Integration neue Transzendenten gewonnen wurden und daß auch (el Integrale wie

$$\int\sqrt{\frac{f+gx^2}{h+kx^2}}\,dx$$

schon zu den bekannten Funktionen gerechnet werden dürften, daß man aber au unendliche Reihen unzählige neue Zahlen und Funktionen definieren könne. Er erw Beispiele für $q=\frac{1}{2}$ die Reihe

$$\sum_1^\infty q^{\nu^2},$$

die später in der Theorie der Thetafunktionen verwendet wurde, ferner die durch d

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2^\nu-1}$$

definierte Zahl, von der er behauptet, sie sei weder rational noch in einfacher Wei die bekannten Irrationalzahlen ausdrückbar. Ferner schreibt er als neue mit den b Funktionen in keinem Zusammenhang stehende Transzendente die Reihe

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a^2+x^2}+\frac{1}{a^3+x^3}+\cdots$$

an. Endlich bemerkt er, um die FERMATsche Behauptung, daß jede natürliche Za Summe dreier Dreieckszahlen $\frac{r(r+1)}{2}$ sei, zu beweisen, habe man nur zu zeigen, daß Reihe $\sum_3^\infty a_\nu x^\nu$ für die dritte Potenz der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(\nu+1)}{2} x^\nu$$

alle Koeffizienten $a_3, a_4, a_5, \ldots$ von Null verschieden sind.[1])

Als Ausführungen zu der Aufgabe, die EULER in dieser Arbeit der Analysis g hatte, nämlich Zahlen und Funktionen durch Reihen zu definieren, können die in Abschnitt noch zu besprechenden Abhandlungen wie auch die bisher schon erwähnten

So beschäftigt sich EULER in der Abhandlung 684 vom 16. Januar 1777

De radicibus aequationis infinitae

(*Opera omnia* I16, p. 241—265) mit der Funktion

$$F(x) = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n(n+1)\cdots(n+5)} + \cdots,$$

insbesondere mit ihren Nullstellen.

Gibt man dem Parameter n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, so erhält ma bekannten Funktionen

$$\cos x \quad \text{mit den Nullstellen } \pm\frac{2\nu-1}{2}\pi,$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{mit den Nullstellen } \pm\nu\pi,$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \quad \text{mit den Nullstellen } \pm 2\nu\pi \qquad (\nu = 1, 2,$$

Da die zuletzt genannten Nullstellen sämtlich zweifache sind, vermutet EULER den S

Die Nullstellen der Funktion $F(x)$ sind, falls der Parameter $n > 0$, aber $\leqq$ sämtlich reell, für $n > 3$ aber sämtlich imaginär.

Da er diesen Satz nicht allgemein beweisen kann (er wurde erst 1926 von G. bewiesen[2])), versucht er (wie oft in ähnlichen Fällen), ihn für gewisse Werte durch Z rechnung zu überprüfen. Er bestimmt so für $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 4$ jedesmal näherung die dem Betrage nach kleinste Nullstelle von $F(x)$, die sich im Falle $n = 4$ als ima in den übrigen Fällen als reell erweist, wie erwartet.

1) Vgl. die Anmerkung I15, p. 526.

2) *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana.* Anno V, Nr. 2. Aprile 1926.

Zu Beginn der am 3. Februar 1777 der Petersburger Akademie vo
lung 685

Exercitatio analytica, ubi imprimis seriei maxime generalis summa

(*Opera omnia* I_{16}, p. 266—281) erinnert EULER daran, daß er in einer
legentlich der Bestimmung der Bogenlänge einer Hyperbel (vgl. E 651
p. 435) auf die Reihe

$$\frac{1}{7}+\frac{1\cdot 5}{7\cdot 11}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 11\cdot 15}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{7\cdot 11\cdot 15\cdot 19}+\cdots=\frac{1}{2} \tag{18}$$

gestoßen war. Er hat das Bedürfnis, diese Reihe noch von einer anderen
suchen, und betrachtet daher die Funktion

$$s(x)=\frac{1}{7}x^7+\frac{1\cdot 5}{7\cdot 11}x^{11}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 11\cdot 15}x^{15}+\cdots,$$

die für $x=1$ die linke Seite von (18) liefert. Um diese Funktion auf
führen, geht er so vor, wie er es in ähnlichen Fällen häufig tat: er ze
$s(x)$ einer Differentialgleichung genügt, und durch deren Integration fin

$$s(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^4}\int_0^x\frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}};$$

für $x=1$ ergibt sich dann der Wert $\frac{1}{2}$ in Übereinstimmung mit (18
sich nicht mit dieser Kraftprobe, sondern betrachtet noch die allgemeine

$$S(x)=\frac{a}{b}x^b+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+\vartheta}x^{b+\vartheta}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+2\vartheta}\cdot\frac{a+2\vartheta}{b+2\vartheta}x^{b+2\vartheta} \tag{19}$$

die für $a=1,\ b=7,\ \vartheta=4,\ x=1$ in (18) übergeht. Er findet wieder
rentialgleichung einen geschlossenen Ausdruck für $S(x)$:

$$S(x)=\frac{a}{n\vartheta}x^{b-\vartheta}-\frac{a(b-\vartheta)}{n\vartheta}(1-x^\vartheta)^n\int_0^x\frac{\xi^{b-\vartheta-1}\,d\xi}{(1-\xi^\vartheta)^n}, \tag{20}$$

wo n zur Abkürzung für $\frac{b-a-\vartheta}{\vartheta}$ gesetzt ist. Aus (19) und (20) folg

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+\vartheta}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+\vartheta}\cdot\frac{a+2\vartheta}{b+2\vartheta}+\cdots=\frac{a}{b-a-\vartheta}. \tag{21}$$

EULERS Bemerkung, daß diese Reihe gelte, falls $b>a+\vartheta$, ist für posi

$$\frac{a}{\vartheta} = \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdot\frac{a_2}{a_3+\vartheta} + \cdots$$

s einer ganz einfachen Identität ableiten läßt; es ist nämlich[1])

$$\begin{aligned}\frac{a}{\vartheta} &= \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{\vartheta}\\ &= \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdot\frac{a_2}{\vartheta}\\ &= \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta} + \cdots + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+\vartheta}\\ &\quad + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+\vartheta}\cdot\frac{a_n}{\vartheta},\end{aligned}$$

raus folgt (22), wenn das Restglied

$$\frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+\vartheta}\,\frac{a_n}{\vartheta}$$

gegen Null konvergiert.

e Abhandlung 710 vom 3. September 1778

Specimen transformationis singularis serierum

mnia I16*, p. 41—55) ist wieder eine von denen, durch die EULER als erster den eines Weges bahnte, der später eine breite Straße mathematischer Forschung wurde: chtet die Funktion $s(x)$, welche durch die hypergeometrische Reihe[2])

$$c, x) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!\,c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

ist. Er zeigt, daß $s(x)$ der Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2s}{dx^2} + [c-(a+b+1)x]\frac{ds}{dx}s - abs = 0$$

und daß daher auch

$$s = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,\ c,\ x)$$

Ein ähnliches Beweisverfahren (angewendet auf die Reihe (21)) findet sich auch in der ng 670 (*Opera omnia* I16, p. 125).

Der Name und die Bezeichnung finden sich zuerst bei C. F. GAUSS in der Abhandlung *ones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \cdots$ (*Werke*, 134). Über die andersartige Bedeutung des Wortes „*series hypergeometrica*" siehe S. XL.

ist. EULER scheint die ganze Größe des Schatzes, den er aufgeschürft hatte, messen zu haben; er hat manches davon, was er selbst hätte heben können, folgern, allen voran GAUSS, überlassen.[1]) In der Abhandlung 710 begnügt einem Beispiel: Das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{(1+a^2-2a\cos\varphi)^{n+1}},$$

wo $i>0$ und $n \gtrless 0$ ganze Zahlen bedeuten, ist gleich

$$\frac{(1-a^2)^{2n+1}}{\pi a^i}\binom{n+i}{i} F(-n+i,\,-n,\,i+1,\,a^2).$$

Ersetzt man n durch $-n-1$ und benutzt (23), so gelangt man zu folgen zwischen zwei bestimmten Integralen:

$$\int_0^\pi (1-2a\cos\varphi+a^2)^n \cos i\varphi\, d\varphi : \int_0^\pi \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+1}} \tag{24}$$
$$=\binom{n}{i}(1-a^2)^n : \binom{-n-1}{i}(1-a^2)^{-n-1}.$$

Diese Gleichung hatte EULER schon früher auf andere Weise bewiesen (vgl lungen 672, 673 und insbesondere 674, *Opera omnia* I_{16}, p. 141, 168, 197; Übersicht über diese Abhandlungen I_{19}, p. XLV). Auch durch dieses Beispiel chung (24) hat EULER eine wichtige Entdeckung vorweggenommen: Setzt m (24) $i=0$ und $\frac{a^2+1}{a^2-1}=x$, so erhält man die später wieder von JACOBI[2]) bew heit der beiden Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

durch deren erstes LAPLACE[3]) das LEGENDREsche Polynom $P_n(x)$ dargestellt

---

1) Vgl. jedoch den Beitrag EULERS zur hypergeometrischen Funktion in E 12 Bericht S. CI) und insbesondere die eingehende Untersuchung einer allgemeiner gleichung, in der die der hypergeometrischen Reihe als besonderer Fall enthalten Bande der *Inst. calc. int., cap.* VIII—XI, *Opera omnia* I_{12}, p. 177—245. Der Her Bandes L. SCHLESINGER schließt (I_{12}, p. VIII) seine Würdigung dieser großen Leistu den Worten: „Wir finden also schon bei EULER das Prinzip, das später GAUSS und fruchtbringender Weise ausgestaltet haben."

2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 26, 1843, S. 81; S. 148.

3) *Mécanique céleste*, t. 5, Livre XI, Chap. II.

...er Abhandlung 736 vom 31. Mai 1779

De summatione serierum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\cdots$$

...*nia* 16*, p. 117—138) werden außer der in der Überschrift genannten Funktion

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2}$$

...Funktionen

$$g(y)=\sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu+1}y^\nu}{\nu^2}$$

$$h(z)=\sum_1^\infty \frac{z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)^2}$$

... Nachdem EULER schon in der Abhandlung 20 (siehe S. XIX dieses Berichts) ...atte, daß

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}(\log 2)^2$$

...gemeinert er jetzt das damals zur Ableitung von (25) eingeschlagene Verfahren ...gt so für gewisse Werte der Veränderlichen x, y, z zu merkwürdigen Beziehungen ...den Funktionen $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$, z. B.

$$f(a)+g(b)=\frac{\pi^2}{6}-\log a\cdot\log b\sqrt{a},$$

... $a=1$ ist; für $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ folgt hieraus wieder (25), dagegen für $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}\cdot\log 6.$$

...d beispielsweise bewiesen, daß

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+2h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}(\log 3)^2$$

...19

Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum

...*nia* 16*, p. 312—327) sind aus dem EULERschen Nachlasse einige Bemerkungen ...e Zusammenhang untereinander) vereinigt worden; ihr Inhalt wird im folgenden

unter den Nummern I) bis V) kurz angegeben:

I)
$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \cdots\right)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \cdots - 2\int_0^1\int_0^y \frac{dx}{1+x^a}\,\frac{y^{a+1}}{1+y^a}\,dy$$

II) Die λ^{te} Potenz der Reihe
$$1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \cdots$$
wird in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt, dere
bestimmt werden.

III)
$$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdot$$
$$= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}(\log 2)^2.$$

IV)
$$1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdot$$
$$= \frac{3\pi^2}{32}.$$

V) Die Reihe
$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \cdots,$$
wo die Nenner die Primzahlen > 2 sind und wo bei Primzahlen der For
Zeichen $-$ und bei Primzahlen der Form $4n + 1$ das Zeichen $+$ steht, wir
schiedene Weisen in besser konvergente Reihen verwandelt. Daß die R
konvergiere, wird ohne weiteres angenommen. Diese Annahme ist erst viel
worden.[1])

1) Siehe E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahle*
Bd. 1, S. 448.

VI. UNENDLICHE PRODUKTE UND KETTENBRÜCHE[1]

Wir beginnen den Bericht über die Arbeiten zur Lehre von den Kettenbrüchen besten mit der am 15. Juli 1757 der Berliner und $2^1/_4$ Jahre später der Petersburger A demie vorgelegten Abhandlung 281

Specimen algorithmi singularis

(*Opera omnia* I_{15}, p. 31—49), welche eine vollständige Lehre von dem formalen Teil Theorie gibt. Um einen Überblick zu bekommen, verwenden wir die moderne Matriz rechnung, welche hier dieselbe Rolle spielt, wie etwa der Infinitesimalkalkül für die Integ tionen von Archimedes.

In einem Kettenbruch seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Teilnenner, während die Teilzähler sein sollen. Der k^{te} Näherungsbruch sei $\frac{P_k}{Q_k}$. Nun seien folgenden Abkürzungen für M trizen gewählt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = M(a), \qquad \begin{pmatrix} Q_i & Q_k \\ P_i & P_k \end{pmatrix} = (i, k).$$

Dann gilt (§ 2)

$$M(a_1)\,M(a_2)\,\ldots\,M(a_n) = (n-1, n).$$

P_n sei als Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bezeichnet, dann wi $P_{n-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Kehrt man die Reihenfolge der Matrizen um und transponiert man sie — was den M nichts ändert —, so ist das Produkt gleich dem transponierten des vorigen. Hierl bleibt P_n ungeändert, wodurch sich ergibt, daß das Klammersymbol seinen Wert nic ändert, wenn die Reihenfolge der Variabeln umgekehrt wird (§ 9), ferner wird

$$Q_n = (a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Da die Determinante von $(n-1, n)$ gleich $(-1)^n$ ist, so wird auch die zu $(n-1, n)$ verse Matrix sich durch dieselben Klammersymbole darstellen lassen. In § 20 werden

1) Der VI. Abschnitt dieser Übersicht ist von A. SPEISER verfaßt.

Determinanten von $(n-1, n)$ festgestellt. Nun ersetze man im Produkt de $M(a_{k+2})M(a_{k+3})\ldots M(a_m)$ die erste Spalte durch 1,0 und bezeichne die so Matrix mit N, dann gilt die Gleichung $(k, k+1)N = (k, m)$. Vergleicht man minanten, so erhält man die Formeln der Paragraphen 25—27.

Die allgemeinste Formel, die EULER in § 31 erhält, kann so gewonnen sei $i < k < n$. Ferner sei gesetzt:

$$M(a_1)M(a_2)\ldots M(a_i) = N,$$

$$M(a_1)\ldots M(a_n) = M,$$

$$M(a_{k+1})M(a_{k+2})\ldots M(a_n) = L.$$

In der zu N inversen Matrix ersetze man die zweite Zeile durch 0,1, ebenso i inversen die erste Spalte durch 1,0 und bezeichne die so entstehenden Matrizen und L'. Berechnet man nun sorgfältig die Matrix $N'ML'$ und ihre Determinant man die allgemeinste Formel dieses Paragraphen.

§ 32 ist das *Assoziativgesetz der Matrixmultiplikation*. In § 34 wird d zweier beliebiger Näherungsbrüche berechnet mit Hilfe der obigen Formel für der sich so ergebenden Determinante.

Im Anschluß an diese Abhandlung ist 323 (I_8, p. 73) zu erwähnen. Die An PELLschen Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ wird dort so erbracht, daß auf $\sqrt{d}$ und 1 ische Algorithmus angewendet und der zugehörige Kettenbruch aufgestellt wird. sich um den Nachweis, daß unter den Resten, die beim EUKLIDischen Algori stehen, eine Zahl auftritt, deren Norm gleich 1 ist. Hierzu werden die Formel verwendet. Der Nachweis des Satzes wird nicht vollständig geführt, indem der B fehlt, daß in der Periode des Kettenbruches die dort mit $2v$ bezeichnete Za auftritt. Schließlich sei noch die Abhandlung 454 (I_3, p. 310) erwähnt, wo die F von 323 verallgemeinert wird.

Die Abhandlung 71 vom 7. März 1737

De fractionibus continuis dissertatio

(*Opera omnia* I_{14}, p. 187—215) ist zeitlich die erste, welche EULER über Kette schrieben hat. Er berichtet zunächst über die Vorgeschichte, vor allem über brüche von BROUNCKER und WALLIS. Dann gibt er für den allgemeinen Kette Bildungsgesetz der Näherungsbrüche. In der obigen Bezeichnungsweise hat man, Zähler über b ist, die Matrix $M(b)$ durch

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

zu ersetzen. Die erhaltenen Resultate werden auf verschiedene Zahlen angewendet, insbesondere solche, die mit e in Verbindung stehen. Dies gibt Anlaß zur Verkürzung eines Kettenbruches mit den Teilnennern $a, m, n, b, m, n, c, m, n, \ldots$ Will man allgemein einen Kettenbruch K' bilden, bei dem der i^{te}, k^{te} und l^{te} Näherungsbruch eines anderen Kettenbruches zu aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen werden, so hat man so vorzugehen: man muß die Matrix X suchen, welche der Gleichung genügt

$$(i, k)\; X = (k, l).$$

Daß die erste Spalte von X die Gestalt 0, 1 hat, folgt schon aus der Natur der Gleichung. Aber der Übergang von (i, k) zu (k, l) kann nach früher durch folgende Stationen bewerkstelligt werden: $(i, k) \rightarrow (i, i+1) \rightarrow (k, k+1) \rightarrow (k, l)$. Macht man das für den soeben angegebenen Kettenbruch mit den Teilnennern $a, m, n, \ldots$ und behält man nur die Näherungsbrüche bei, deren Nummer durch drei teilbar ist, so erhält man ohne Schwierigkeit einen Kettenbruch, dessen Teilzähler sogar wieder 1 sind. Er ist mit Ausnahme des ersten Termes in m und n symmetrisch (§ 23 und 24).

In § 28 wird zunächst ohne Beweis die Lösung der Riccatischen Gleichung

$$a y' + y^2 = x^{\frac{-4n}{2n+1}}$$

mit Hilfe eines Kettenbruches angegeben — eines der ersten Resultate Eulers in diesem Gebiet. Führt man jedoch statt x die dort angegebene Variable p und statt y den Ausdruck im letzten Teilnenner ein, der mit z bezeichnet sei, so ergibt sich die Gleichung

$$a z' = 1 + \frac{2na}{p} z - z^2.$$

Bezeichnet man ferner mit z^* eine Lösung dieser Gleichung mit $n-1$ statt n, so findet man sofort

$$z^* = \frac{(2n-1)a}{p} + \frac{1}{z},$$

woraus sich die Kettenbruchentwicklung unmittelbar ergibt.

In § 31—35 wird ein verwandter Kettenbruch aufgestellt und aus seinem Bildungsgesetz seine Beziehung zur Riccatischen Differentialgleichung hergestellt.

Die Abhandlung 247 (vgl. S. LXXVI dieses Berichts)

De seriebus divergentibus

enthält eine wichtige Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch, die man allgemein folgendermaßen angeben kann: *Es seien P und Q zwei Potenzreihen, deren kon-*

stante Glieder beidemal $= 1$ seien, ferner möge die Entwicklung von
beginnen. Jetzt setze man

$$P = Q + axR \quad \text{und fahre fort}$$

$$Q = R + bxS.$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Gestalt $\frac{P}{Q} = 1 + \frac{ax}{\frac{Q}{R}}$, so
mittelbar eine Kettenbruchentwicklung. Sie hat eine außerordentliche konv
Kraft, und mit ihr gelingt es EULER, der Reihe $\sum(-1)^n n! x^n$ eine Funkt
Er wählt für P diese Reihe und für Q die Funktion 1.

Die Abhandlung 122 vom 12. Januar 1739

De productis ex infinitis factoribus ortis

(*Opera omnia* I14, p. 260—290) gehört in das Gebiet der Betafunktionen un
Zusammenhang zu 254 (I17, p. 233). Da in der Vorrede zu I19, p. XLVIII
wird, so sei hier auf ein Referat verzichtet. Man wird auch für die folgend
mit Vorteil jene Übersicht zu Hilfe nehmen.

Aus EULERS Bemühungen, die Methoden von BROUNCKER wiederzufinde
Abhandlungen entstanden. Die Nummer 123 (der Petersburger Akademie am
vorgelegt)

De fractionibus continuis observationes

(*Opera omnia* I14, p. 291—349) beginnt mit der Umwandlung von Reihen
und umgekehrt, wobei aber die Teilsummen den Näherungsbrüchen gleich
satz zur vorher genannten Transformation. Indem gewisse Integrale erst
wickelt werden, gewinnt EULER Kettenbruchentwicklungen. In § 15 wen
WALLISschen Kettenbruch zu und zeigt, daß er einem unendlichen Produkt
Wert als Quotient zweier Integrale schon in der Abhandlung 122 erkannt i
die Interpolation von Reihen heran. Hier handelt es sich um folgendes P
ist eine Funktion $\alpha(x)$ und gesucht eine Funktion $f(x)$, welche folgender Be

$$f(x)f(x+1) = \alpha(x) \quad \text{für} \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man voraus, daß sowohl $\alpha(x)$ als $f(x)$ mit wachsendem x nach 1 strebe

$$f(1) = \frac{\alpha(1)\alpha(3)\ldots}{\alpha(2)\alpha(4)\ldots}$$

Kennt man einen andern Ausdruck für das Wachsen von $f(x)$, etwa $b + c$
oder allgemein $b(x)$, so setze man $f(x) = b(x) + g(x)$, wo nun $g(x)$ ges

man hier x durch $x+1$ und multipliziert, so findet man

$$g(x) = A(x) + \frac{B(x)}{C(x) + g(x+1)},$$

wo A, B und C bekannte Funktionen sind. Dieser Ausdruck führt, wenn man ihn fortsetz unmittelbar auf einen Kettenbruch. Dies scheint EULER der wahre Weg gewesen zu sein auf dem BROUNCKER zu seinem Ausdruck geführt wurde. Aber die Kettenbrüche, auf die e so geführt wird (§ 21—36), weichen noch zu sehr davon ab, und so gibt er (§ 37—48) de Überlegung noch eine neue Wendung, indem er eine Tafel mit doppeltem Eingang ve wendet. Hier sei auf eine Besprechung verzichtet, weil die Methode bei der Abhandlung 55 ausführlich zur Darstellung kommt.

Von § 49 ab wird eine direkte Methode zur Bildung von Kettenbrüchen ve wendet, die auch in anderen Abhandlungen vorkommt. Besteht in einer unendlichen Folg von Größen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Termen eine lineare homogene Be ziehung mit beliebigen veränderlichen Koeffizienten, so ergibt sich unmittelbar ein Kettenbruchentwicklung für den Quotienten der beiden ersten Terme. EULER geht nu von den Koeffizienten aus und nimmt sie als lineare Funktionen ihrer Nummer an (§ 49 Er sucht jetzt die Terme der Folge in Gestalt von Integralen zu gewinnen (§ 52—55 und erhält für einen Kettenbruch, der schon in § 34 summiert war, einen neuen Aus druck, dessen Übereinstimmung mit dem vorigen in § 56—59 nachgewiesen wir Hierauf gelangt er in das Gebiet der hypergeometrischen Funktion und gewinnt fü den Quotienten benachbarter Funktionen Kettenbruchentwicklungen. Gleichzeitig finde er weitere Relationen. Beispielsweise sei in § 65 die moderne GAUSSische Bezeichnungs weise eingeführt. Setzt man

$$p = 1, \quad q = -z, \quad \frac{c-b}{r} + 1 = \alpha, \quad \frac{c}{r} + 1 = \beta, \quad \frac{a}{r} + 1 = \gamma,$$

so wird die zweite Formel auf p. 338 zu folgender:

$$\frac{F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma;\ z)}{F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-1,\ \gamma-1;\ z)} = \frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)}{F(\alpha,\ \beta-1,\ \gamma-1;\ z)}.$$

Daß schon die beiden Zähler im wesentlichen übereinstimmen, hat EULER erst in 71 (I₁₂*, p. 43) nachgewiesen; vgl. S. XCIII.

Wenn EULER gleich darauf $b = c + r$ setzt, so handelt er gegen die Vorschri der vorigen Seite, und das Integral am Schluß des § 65 wird in einen Pol erstreck Aber die Formel ist insofern richtig, als sie auf den Fall $\beta = \gamma$ führt und daher i

der Tat $m(=\beta)$ herausfällt. Von § 75 ab zieht EULER die RICCATIsche gleichung heran.

Der Methode der Rekursionsformel ist die am 4. September 1755 der Akademie vorgelegte Abhandlung 522 gewidmet

De formatione fractionum continuarum

(*Opera omnia* I_{15}, p. 314—337). Der Ausdruck $x(a + bx + cx^2)$ verschwinde x gleich 0 oder gleich einer Wurzel α des quadratischen Faktors setzt. man ihn nach x, so erhält man drei Terme. Integriert man wieder von erhält man drei Integrale, deren Summe gleich 0 ist. Die Kettenbrüche, erhält, geben bei geschickter Wahl der Anfangsfunktion Berechnungen bestimm die zu den *„quantitates maxime transcendentes"* gehören. Der Fall von § 29 in der Abhandlung 606 (I_{16}, p. 244) für $\vartheta = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ durchgeführt und Beispielen illustriert.

Den Übergang von § 37—48 der Abhandlung 123 zu den weittragenden Ü von 553 bildet 550 (vom 4. Juli 1771)

De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt pr

(*Opera omnia* I_{15}, p. 383—399). Nach einigen vorläufigen Untersuchungen, d der Abhandlung 122, also der Produktentwicklungen von Betafunktionen gehören folgendes Problem gestellt:

Es soll $f(x)$ aus der Gleichung $f(x)f(x+1) = p + xq$ $(x = 1, 2, \ldots$ werden. Um von hier zu einem Kettenbruch zu gelangen, müßte man für d von $f(x)$ einen passenden Ansatz $g(x)$ machen, aber da $g(x)g(x+1)$ bloß linear darf, so läßt sich kein einfacher Ausdruck finden. EULER quadriert nun die G bekommt rechts einen in x quadratischen Ausdruck, so daß also $f^2(x)$ sich seh einen linearen Ausdruck annähern läßt, der natürlich sich von $p + qx$ nur scheidet. Diese Methode wird an einem etwas allgemeineren Fall in § 16—28 und alsdann auf das spezielle Problem angewendet. EULER erhält so auf Wegen Kettenbrüche für Quotienten der Betafunktionen.

Die Abhandlung 553 (vom 18. Mai 1772)

Observationes analyticae

(*Opera omnia* I_{16}, p. 400—434) befaßt sich mit folgendem Problem aus den hypergeometrischen Funktionen: Es ist eine Funktion zweier Veränderlichen ge welche bei Vermehrung der Argumente um ganze Zahlen eine linear gebrochene erfährt.

Der genaue Ansatz ist folgender:

$$f(x, y) = A(x, y) + \frac{P(y)}{f(x, y+1)}$$

$$f(x, y) = B(x, y) + \frac{Q(x)}{C(x, y) + f(x+1, y)}.$$

Hierbei setzt EULER A, B und C als lineare Funktionen, P und Q als quadratische a
Die Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, und EULER zeigt in § 7—9, daß m
zwischen den Koeffizienten der ersten Gleichung eine Relation annehmen muß, und d
hierauf die Koeffizienten der zweiten Gleichung völlig bestimmt sind. Diese Beziehung
ergeben sich als Vertauschungsrelationen von Matrizen, indem man den Übergang von $f(x,$
zu $f(x+1, y+1)$ auf zwei Wegen herstellen kann.

Jede der beiden obigen Gleichungen gestattet eine Kettenbruchdarstellung von $f(x, y$
indem man die eine Variable festhält und die andere um ganze Zahlen vermehrt (§ 11). D
Funktionen, die man so erhält, sind hypergeometrische Funktionen. Man kann das Verfahr
auch umkehren und ganze Zahlen subtrahieren. Auf diese Weise gewinnt man (§ 17) vi
Kettenbrüche für $f(x, y)$ und damit Funktionalgleichungen. So liefern die beiden Kette
brüche eine Beziehung zwischen Funktionen mit vertauschten x und y, und zwar mit Ve
wendung der dortigen Variablen und Koeffizienten:

$$p(A, B, C, D, E, F, m, n) = p(A, B, C, D, \mu, \nu, n, m) + \frac{1}{2}(A+B)(m-n) + \frac{1}{2}(G-($$

Sie ist in der Tat eine Involution.

EULER fordert einen direkten Beweis dieser Relationen. Die Arbeit behandelt i
übrigen eine große Zahl von speziellen Fällen.

Einen mehr elementaren Charakter weist 593 (vom 18. September 1775)

De transformatione serierum in fractiones continuas

(*Opera omnia* I_{15}, p. 661—700) auf. Sie geht inhaltlich mit dem 18. Kapitel der *introduc*
in analysin infinitorum (I_8, p. 362 ff.) parallel. Die gegenseitige Umwandlung von Kette
brüchen und Reihen, wobei Näherungsbrüche und Teilsummen einander zugeordnet si
und daher Konvergenzfragen nicht berührt werden, wird ausführlich auseinandergesetzt u
an vielen Beispielen erläutert. Insbesondere wird in § 19 der BROUNCKERsche Kettenbru
aus der LEIBNIZschen Reihe hergeleitet.

Die kurze Abhandlung 616 (vom 11. Januar 1776)

De transformatione seriei divergentis etc.

(*Opera omnia* I_{16}, p. 34—46) ist, wie im *Summarium* schon bemerkt wird, eine Wied

holung gewisser Überlegungen von 247 (I_{14}, p. 585), über welche oben ist. Immerhin sei auf die auch im *Summarium* hervorgehobene Verkürz bruches in § 9 auf die Hälfte der Terme aufmerksam gemacht. Am Sch gekehrt wie in 593 — der BROUNCKERsche Kettenbruch in die LEIBNI gewandelt.

Die am 18. November 1779 vorgelegte Abhandlung 742

Observationes circa fractiones continuas etc.

(*Opera omnia* I_{16*}, p. 139—161) behandelt unter Anwendung immer kräft die Summierung der Kettenbrüche mit den Teilnennern 1, 2, 3, ... und n, $n+1$, $n+2$, ... für ganzzahlige Werte von n. Zunächst werden m Schranken die Werte für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 aufgesucht. Dann wird (§ beliebiges n dadurch bestimmt, daß der Kettenbruch nach oben zu fortges Teilzähler $= 0$ entsteht, worauf durch Nullsetzen des Nenners ein endli entsteht mit der gesuchten Summe als letztem Term. Die Umkehrung desse endlichen Kettenbruch für diese Summe (§ 21). Aus den gefundenen We ersten Fälle stellt EULER eine Rekursionsformel auf (§ 21). Diese wird (§ 23—28) durch Zuhilfenahme einer Formel aus der Reihenlehre (§ 24, genannte Formel findet man z. B. in den *Institutiones calculi differentialis.* (I_{10}, p. 52) abgeleitet.

In engstem Zusammenhange mit der Abhandlung 123 und insbeso Paragraphen 37—48 steht die Nummer 745 (vom 7. Februar 1780)

De fractionibus continuis WALLISII

(*Opera omnia* I_{16*}, p. 178—199). Nach einem kurzen Bericht über die WALLIS stellt EULER das Problem, die Funktion $f(x)$ zu finden, welch genügt

$$f(x)\,f(x+1) = (b+ax)^2 + c \quad \text{für} \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

und zwar zunächst für den Fall $c = 0$. Er wendet zur Kettenbruchentw mit doppeltem Eingang an, die in der Besprechung zu 553 auseinandergese durch Spezialisierung die Kettenbrüche von WALLIS (§ 12), dann gibt e wicklung (§ 15) und die Darstellung durch Integrale (§ 16). Hierauf geht er z Problem über und behandelt es in derselben Weise. Der Kettenbruch in § jenigen von § 47 der Abhandlung 553 über, wenn man $2f - a = s$, $a - 2b$ setzt. Wird c als eine positive Zahl angenommen, so werden die Teilz bruches quadratische Ausdrücke der Nummer mit imaginären Wurzeln. Ent die unendlichen Produkte imaginäre Faktoren enthalten und die Integral

granden. EULER zeigt, wie man zu reellen Ausdrücken gelangen kann und hierbe Integrale von der Gestalt

$$\int_0^1 \frac{x^{f-1} \cos (b \log x)\, dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

geführt wird. Er gibt zum Schlusse einen expliziten Ausdruck für solche Integrale bei lassung des Nenners.

In 750 (vom 20. März 1780)

Commentatio in fractionem continuam, qua illustris LA GRANGE potestates binomiales exp

(*Opera omnia* I16*, p. 232—240) macht EULER einige Bemerkungen zu einem Kettenl für $(1+x)^n$, den LA GRANGE aufgestellt hatte und der die bemerkenswerte Eigenschaf sitzt, daß er für positive und negative ganzzahlige n endlich ist. Durch einige Transfo tionen findet EULER einen Ausdruck, der nur n^2 enthält, und er entwickelt, teilweise (Übergang zu komplexen Werten, u. a. arctg t und lg t in Kettenbrüche.

VII. BERECHNUNGEN DER ZAHL π

EULER hat sich zu den verschiedensten Zeiten seines Lebens m schäftigt: Wie berechnet man die Zahl π mit vorgeschriebener Genauigk Wege? Schon seine erste Arbeit über diesen Gegenstand, nämlich di vom 20. Februar 1738

De variis modi circuli quadraturam numeris proxime exprime

(*Opera omnia* I14, p. 245—259) enthält mehrere der später von ihm w Verfahren. Nachdem er kurz den Gedankengang des Archimedes und die MACHIN $\left(100 \text{ Stellen mittels der Formel } \frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\right)$ und wähnt hat, formt er den Rest der Reihe

$$(1) \qquad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

mittels seiner Summenformel um und leitet dann mittels des Additionsth tangens-Funktion

$$(2) \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

Formeln ab wie diese[1])

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99}.$$

Durch unbeschränkt wiederholte Anwendung der Formel (2) werden gefunden wie

---

1) Für $\frac{\pi}{4}$ gebraucht er in dieser Arbeit den Buchstaben α; für Arcu er die Abkürzung At, in späteren Abhandlungen Atang (z. B. 280, I16, S. 17) 809, I16*, S. 259). In der zweiten obiger Formeln (3) findet sich *Opera om* der rechten Seite infolge eines Druckfehlers At $\frac{1}{34}$ statt At $\frac{1}{31}$.

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \operatorname{arctg}\frac{1}{32} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots \\ \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \operatorname{arctg}\frac{1}{21} + \operatorname{arctg}\frac{1}{31} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Auch Formeln der folgenden Art:

$$(4)\qquad \operatorname{arctg}\frac{p}{p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} - \frac{2}{9p^9} - \frac{1}{11p^{11}} + \cdots$$

$$(5)\qquad \operatorname{arctg}\frac{2p}{2p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3\cdot 2p^3} - \frac{1}{5\cdot 2^2p^5} - \frac{1}{7\cdot 2^3p^7} + \frac{1}{9\cdot 2^4p^9} + \cdots$$

$$(6)\qquad \operatorname{arctg}\frac{3p(p^2-1)}{p^4-4p^2+1} = \frac{3}{p} + \frac{3}{5p^5} - \frac{3}{7p^7} - \frac{3}{11p^{11}} + \frac{3}{13p^{13}} + \cdots$$

werden mitgeteilt; sie sind leicht zu bestätigen, indem man beide Seiten nach $x = \frac{1}{p}$ renziert, wobei die rechten Seiten in Summen von geometrischen Reihen übergehen. EULER zu diesen Reihen gelangt ist, wird nicht ersichtlich. Ihre Verwendungsmöglic deutet er durch Beispiele an; so liefert (6) für $p = 2$ den Wert arctg 18; addiert man arctg $\frac{1}{18}$ so erhält man nach (2) $\frac{\pi}{2}$. Zum Schlusse wird in nur losem Zusammenhang dem Vorhergehenden mit Benutzung der Formeln

$$\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}, \quad \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}} = 4\sin\frac{x}{4}, \quad \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}} = 8\sin\frac{x}{8}, \cdots$$

die Gleichung

$$(7)\qquad \frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots$$

abgeleitet und durch eine kurze Näherungsrechnung mittels der Logarithmentafel best

Eine unendliche Menge von Formeln, die alle als Verallgemeinerungen der Forme anzusehen sind, gibt EULER in der Abhandlung 280

De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt

(*Opera omnia* I₁₅, p. 16—30), die am 23. November 1758 in der Berliner Akademie lesen, dann aber am 15. Oktober 1759 der Petersburger Akademie vorgelegt worden

Die in ihr mitgeteilten Formeln beruhen alle auf der Identität

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_n &= (\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2) + (\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_3) \\
&\quad + (\operatorname{arctg} x_3 - \operatorname{arctg} x_4) + \cdots + (\operatorname{arctg} x_{n \ldots} \\
&= \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} + \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_3}{1 + x_2 x_3} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{x_n \ldots}{1 + \ldots}
\end{aligned} \tag{8}$$

und der sich aus ihr im Falle $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ ergebenden unendlichen Reihe für ar… bringt sehr viele Beispiele, in denen er $x_\nu = \frac{1}{a + (\nu - 1) b}$ setzt ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$ … er beispielsweise, indem er weiter $a = 7$, $b = 25$ wählt, die Reihe

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \sum_1^\infty \operatorname{arctg} \frac{1}{25 \nu^2 + 11 \nu - 5}.$$

Umgekehrt bemerkt er: Wenn

$$M^2 + 4 = L^2 + 4 L N$$

ist, so läßt sich die Reihe

$$\sum_1^\infty \operatorname{arctg} \frac{1}{L \nu^2 + M \nu + N}$$

summieren, und ihre Summe ist $\operatorname{arctg} \frac{2}{L + M}$. Zu verhältnismäßig einfache… Form (8) gelangt EULER auch, indem er für $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Näherungsbr… $\frac{ab+1}{b}, \ldots$ des Kettenbruchs

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

wählt. Schließlich zeigt er, daß umgekehrt aus

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \operatorname{arctg} \frac{1}{y_1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y_2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y_3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y_4} + \cdots$$

folgt

$$z = y_1 + \cfrac{y_1^2 + 1}{-y_1 + y_2 + \cfrac{y_2^2 + 1}{-y_2 + y_3 + \cfrac{y_3^2 + 1}{-y_3 + y_4 + \cdots}}}$$

Obwohl in dieser Abhandlung 280 von der Berechnung der Zahl π nirg… ist, wurde sie doch in die VII. Gruppe aufgenommen; denn sie knüpft unmi… zuvor besprochene Abhandlung 74 an.

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2-x} = \int_0^x \frac{dt}{2-2t+t^2} = 2\int_0^x \frac{dt}{t^4+4} + 2\int_0^x \frac{t\,dt}{t^4+4} + \int_0^x \frac{t^2\,dt}{t^4+4}$$

(9)

$$= \frac{x}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{4\nu+1}\left(\frac{x^4}{4}\right)^\nu + \frac{x^2}{4}\sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\left(\frac{x^4}{4}\right)^\nu + \frac{x^3}{4}\sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{4\nu+3}\left(\frac{x^4}{4}\right)^\nu.$$

Die rechte Seite ist für $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$ leicht mit einiger Genauigkeit zu berechne und liefert dann die Werte $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, aus denen sich π vermöge der Gleichun

$$\pi = 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$$

ergibt. Dieses Berechnungsverfahren bildet den Inhalt der Abhandlung 706 vom 17. Juni 177

De novo genere serierum rationalium et valde convergentium, quibus ratio peripheriae ad diametrum exprimi potest

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 21—27).

Zehn Tage vorher hatte EULER der Petersburger Akademie die Abhandlung 705 vorgelegt

Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accomodatae

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 1—20). In ihr wird zur Berechnung von π ein in den bisher be sprochenen Arbeiten nicht vorkommendes, sehr brauchbares Hilfsmittel benutzt, nämlic die Reihe[1])

$$(10) \qquad \operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 8}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right).$$

1) Aus Gleichung (68) S. XXXVI ergibt sich durch Differentiation

$$\arcsin x = x\sqrt{1-x^2}\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^4 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^6 + \cdots\right),$$

und hieraus folgt (10) durch die Substitution

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} t, \quad \text{also} \quad x^2 = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad x\sqrt{1-x^2} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Die Reihe (10) findet sich zuerst bei JOHANN BERNOULLI: *Opera omnia* t. 4, *Lausannae et Ge nevae* 1742, p. 24. Sie wurde schon vor EULER in Verbindung mit Formeln wie (11), (12) zu Berechnung von π herangezogen durch CHARLES HUTTON: *Philosophical Transactions*, Bd. 66, 1776 S. 476—492.

EULER beweist sie auf mehrere Weisen und benutzt sie im Zusam
legungssätzen wie

$$(11)\qquad \pi = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$(12)\qquad \pi = 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{7},$$

$$(13)\qquad \pi = 20 \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg}\frac{3}{79}$$

zur Berechnung von π. Insbesondere liefert (13) den Ansatz, der wohl
eignetste ist, um den *Dezimalbruch für π zu finden:*

$$\pi = \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{2}{100} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{144}{100000} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\right].$$

In der im ersten Bande der *Opera postuma* erschienenen Abhandlun

Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime inveni

(*Opera omnia* I₁₆*, p. 267—283), die sonst im wesentlichen nur eine Wie
eben besprochenen Abhandlung 705 ist, berechnet EULER mit dieser Form
malstellen, wozu er, wie er mitteilt, nur ungefähr eine Stunde gebraucht

Es bleiben noch zwei Arbeiten EULERS zu besprechen, in denen zur
π *Wege eingeschlagen werden, die untereinander und von den in den bi*
Arbeiten eingeschlagenen ganz verschieden sind; es sind dies die Abhan
23. März 1739

Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam invenien

(*Opera omnia* I₁₄, p. 350—363) und die Abhandlung 275

Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam s

die am 20. Juli 1758 der Berliner und am 15. Oktober 1759 der Peters
vorgelegt worden ist (*Opera omnia* I₁₅, p. 1—15). In der letzteren beweist
tigkeit einer Folge von Konstruktionen des DESCARTES, die mit immer grö
lich beliebig großer Genauigkeit den Durchmesser des Kreises liefern, dess
dem eines gegebenen Quadrats ist.

EULER zeigt, daß die Reihe

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{32} + \cdots = \frac{4}{\pi}$$

Die Abhandlung 125 beginnt mit der Berechnung des Integrals

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2};$$

die Strecke $0 \ldots t$ wird in n gleiche Teile geteilt und $\operatorname{arctg} t$ näherungsweise durch d
Rechteckformel

$$\frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \cdots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2} = s$$

berechnet; dann wird die Differenz $\operatorname{arctg} t - s$ mittels der EULERschen Summenformel ab
geschätzt und schließlich $t = 1$ gesetzt, wodurch sich folgende Formel für $\frac{\pi}{4}$ ergibt:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

(14) $$+ \frac{1}{4n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 10n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^7 \cdot 14n^{14}}$$

$$+ \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^9 \cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{11} \cdot 22n^{22}} + \cdots$$

(Die *Faktoren* $\frac{1}{6}, \frac{1}{42}, \frac{5}{66}, \frac{7}{6}$ usw. sind die BERNOULLIschen Zahlen B_2, B_6, B_{10}, B_{14} usw.

Unter der Annahme $n = 5$ gewinnt er aus (14) π auf 12 Dezimalstellen richtig.

EULER erkennt (§ 15) sehr richtig, daß die Reihe (14) nach der heutigen Bezeich
nungsweise „halbkonvergent" ist; er sagt, je größer n sei, um so genauer liefere sie π
doch *müsse man sie an einer geeigneten Stelle abbrechen*, denn sie divergiere, und zwar s
sehr, daß auch die Reihe, die nach Multiplikation des ν^{ten} Gliedes mit x^ν entstehe, divergen
bleibe, wie klein auch x sei; der Quotient $|B_{2\nu-2}| : |B_{2\nu-4}|$ bleibe nämlich (für $\nu > 2$
oberhalb $\frac{(\nu-2)(2\nu-3)}{2\pi^2}$ [1]) und $|B_{2\nu+2}| : \nu^2 B_{2\nu}|$ sei asymptotisch gleich $\frac{1}{\pi^2}$. Daraus schließ
er richtig, daß das dem Betrage nach kleinste Glied der Reihe (14) eine Nummer habe, di
in der Nähe von $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ liege. Mit sicherem Gefühl sagt EULER, daß man bei jenem Gliede di
Summation abbrechen müsse. Eine Begründung dieses Gefühls oder die Angabe einer oberen
Grenze des Fehlerbetrages durfte man von ihm und seiner Zeit nicht verlangen. Die Rest

1) Das folgt leicht aus (3) S. IX.

abschätzung, die er in § 16 versucht, entbehrt der Begründung. Ist P das
mit dem kleinsten Betrage folgende, so hat zwar EULER recht, wenn
Glied und die nächstfolgenden stimmten ungefähr mit den Anfangsgliedern
schen Reihe

$$P\left(1-\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4}+\left(\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4}\right)^2-\left(\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4}\right)^3+\cdots\right) \tag{15}$$

überein (wo μ die Anzahl der beibehaltenen Glieder, also die Nummer des k
der Reihe (14) ist), aber es ist kein Grund einzusehen, warum die Summe

$$\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4+4\mu^4}$$

der geometrischen Reihe (15) als Abschätzung des Restes hinzugefügt werde

München, im Januar 1935.

GEOR

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis ENESTROEMIANI commentationes

705, 706, 709, 710, 722, 726, 736, 742, 743, 745, 746, 747, 750, 768, 809, 810, 819

736. De summatione seriorum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\text{etc.} \;\ldots\ldots\ldots$$

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg **3** (*1809/10*), *1811*, p. 26

742. Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas

$$S=\cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 52—7

743. De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque
primi potest . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 75—8

745. De fractionibus continuis Wallisii . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 24—4

746. Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas (
rentiales investigandi . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 45—5

747. De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum
tiplorum exprimere licet . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 57—7

750. Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange pot
tes binomiales expressit . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 6 (1813/14), 1818, p. 3-

768. De unciis potestatum binomii earumque interpolatione . . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 9 (1819/20), 1824, p. 57

INVESTIGATIO QUARUNDAM SERIERUM QUAE AD RATIONEM PERIPHERIAE CIRCULI AD DIAMETRUM VERO PROXIME DEFINIENDAM MAXIME SUNT ACCOMMODATAE[1]

Conventui exhibita die 7. Iunii 1779

Commentatio 705 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 133—149

Summarium ibidem p. 167—168

SUMMARIUM

Tous ceux qui après VAN CEULEN[2]) ont cherché par approximation la circonférence π un cercle, dont le diametre $= 1$, se sont servis de la série connue de LEIBNITZ, en vertu laquelle l'arc s d'un cercle, dont le rayon $= 1$, est exprimé par sa tangente t de la nière suivante:

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}$$

i donne pour la circonférence entiere

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \text{etc.}\right)$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 74 indicis ENESTROEMIANI, *LEONHARDI ULERI Opera omnia* vol. I14, p. 245—259 et Commentationem 809 huius voluminis.
C. B.

2) Voir la note 2 au bas de la page 3. C. B.

Feu M. EULER avoit déjà proposé[2]), dans le neuvieme volume des anciens Comm
pour l'année 1737, une méthode de diminuer ce travail énorme, en faisant usage de la
sition des arcs, et nommément de l'expression

$$\frac{\pi}{4} = \text{A tang.}\,\frac{1}{2} + \text{A tang.}\,\frac{1}{3}$$

qui donne

$$\frac{\pi}{4} = \left\{\begin{aligned} &+\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \text{etc.} \\ &+\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \text{etc.} \end{aligned}\right\}.$$

Le travail devient encore plus léger, quand on se sert de la décomposition

$$\pi = 8\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3} + 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{7};$$

les séries qui en résultent deviennent très convergentes; le seul inconvénient qui en
un peu l'avantage est la division successive par 49, qui n'est pas assez commode.

Pour remédier à cet inconvénient, M. EULER donne ici une autre expression
par sa tangente t, savoir

$$s = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right],$$

qu'il *démontre de deux manières différentes* et qui, en mettant $t = \frac{1}{3}$ et puis $t =$
l'expression

$$\pi = 8\,\text{A tg.}\,\frac{1}{3} + 4\,\text{A tg.}\,\frac{1}{7},$$

donne la circonférence exprimée par les deux séries suivantes:

$$\pi = \left\{\begin{aligned} &+\frac{24}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ &+\frac{28}{50}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \text{etc.}\right] \end{aligned}\right\}$$

qui sont non seulement très convergentes, mais, de plus, d'un usage très commod
facilité avec laquelle on peut déduire chaque terme de son précédent.

L'avantage devient encore plus grand, si l'on se sert de la décomposition

$$\pi = 20\,\text{A tang.}\,\frac{1}{7} + 8\,\text{A tang.}\,\frac{3}{79};$$

car elle fournit des séries encore plus convergentes et douées des mêmes avanta
tivement à la commodité du calcul. Ces séries sont:

2) Voir la note 4 au bas de la page 3. G. B.

$$\left(+ \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{144}{100000}\right)^3 + \text{etc.}\right]\right\},$$

dont la seconde est surtout remarquable par la propriété de donner la somme des c premiers termes exactement par une fraction décimale de 26 chifres, tous les suivans éta des zéros.

1. Qui post LUDOLPHUM A CEULEN[1]) veram rationem peripheriae ad di metrum proxime assignare susceperunt, usi sunt serie LEIBNITIANA[1]), qua p circulo, cuius radius $= 1$, arcus quicunque s per suam tangentem t ita e primi solet, ut sit

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.},$$

quae eo magis convergit, quo minor tangens t accipiatur. Sed quia arcus ad totam peripheriam, vel ad arcum quadrantis cognitam rationem tene debet, pro arcu s vix minorem valorem assumere licet, quam 30 graduum quippe cuius tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, quo valore in serie substituto, si semiperipher circuli per π designetur, erit $\pi = 6s$, unde deducitur haec series

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \text{etc.}\right).$$

Hinc patet calculum huius seriei ante institui non posse, quam radix qua drata ex numero 12 ad tot figuras decimales fuerit extracta, ad quot valo ipsius π desideratur, quem stupendum laborem olim ABRAHAMUS SHARP[2]) usqu ad 72 figuras decimales, tum vero Professor Greshamiensis MACHIN[3]) a 100 figuras est executus. Multo maiorem autem laborem sollertissimus calcu lator Gallus DE LAGNY[4]) est exantlare coactus, qui ex eadem serie valorem ipsius π adeo usque ad 128 figuras decimales determinavit, qui labor cert plus quam Herculeus est censendus, cum tamen extractio radicis ex numero 1 tantum tanquam opus praeliminare sit spectandum, istam enim immensar

1) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, notam ad p. 178 adiectam. C. B.
2) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I11, notam ad p. 249 adiectam. C. B.
3) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, notam 1 ad p. 246 adiectam. C. B.
4) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I11, notam 2 ad p. 246 adiectam. C. B.

fractionem decimalem demum opus erat continuo per 3 dividere, insuper singuli termini per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11 etc. ord debebant. Cum igitur istius seriei quilibet terminus in hac forma c

$$\frac{+\sqrt{12}}{(2n+1)3^n},$$

ubi n denotat numerum terminorum, tot terminos computari oportet,

$$\frac{(2n+1)3^n}{\sqrt{12}} = 10^{128},$$

sive, logarithmis vulgaribus sumendis, donec fiat

$$l(2n+1) + nl3 - \frac{1}{2}l12 = 128;$$

unde primam partem $l(2n+1)$ negligendo colligitur

$$n = \frac{128 + \frac{1}{2}l12}{l3}$$

hincque prodit terminorum numerus aliquanto minor quam 269; e que maximo est *mirandum quemquam fuisse repertum*, qui hunc laborem exsequi sit ausus.

2. Iam dudum[1]) autem proposui methodum istum laborem sublevandi, postquam scilicet ostendi duos arcus satis exiguos in h adhiberi posse, quorum quidem neuter ad peripheriam teneat ratio nalem, quorum tamen summa talem rationem teneat. Tales arcus

$$\text{A tang.}\frac{1}{2} + \text{A tang.}\frac{1}{3} = \text{A tang. } 1 = \frac{\pi}{4},$$

ita ut

$$\pi = 4\,\text{A tang.}\frac{1}{2} + 4\,\text{A tang.}\frac{1}{3},$$

1) Confer Commentationis 74 indicis ENESTROEMIANI supra laudatae §§ 11 *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, p. 252. C. B.

quorum uterque per nostram seriem facile evolvitur, cum sit

$$\text{A tang. } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \text{etc.}$$

et

$$\text{A tang. } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.},$$

ubi termini illius seriei fere in ratione quadrupla decrescunt, huius vero i ratione fere noncupla ideoque multo magis convergunt, quam series ab Au toribus memoratis usurpata. Praecipue vero notandum est hoc modo nullar extractionem radicis requiri sicque fere maximam partem illius laboris evitar praeterea etiam singuli termini harum novarum serierum facillime in fractione decimales convertuntur; quae quia figurae certum ordinem, imprimis ab initi servant, computus ad quotcunque figuras sine magno labore extenditur.

3. Multo magis autem labor diminuetur, si adhuc minores arcus in sul sidium vocentur. Cum enim sit

$$\text{A tang. } \frac{1}{2} = \text{A tang. } \frac{1}{3} + \text{A tang. } \frac{1}{7},$$

erit nunc

$$\pi = 8 \text{ A tang. } \frac{1}{3} + 4 \text{ A tang. } \frac{1}{7},$$

sicque in serie priore termini statim in ratione noncupla decrescunt, in post riore vero adeo 49 vicibus evadunt minores. Unicum autem, quod hic des derari posset, in hoc consistit, quod non tam facile per 49 continua divis instituatur optandumque fuisset, ut ista divisio vel per potestatem denar vel alius numeri simplicem ad 10 rationem tenentis expediri posset.

4. Incidi autem nuper in modum prorsus singularem, quo huic incon modo felicissimo successu occurritur atque adeo series praecedentes mag convergentes redduntur. Constat autem iste modus in idonea transformatio seriei LEIBNITIANAE, quae per sequentes operationes procedit.

$$s = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{etc.},$$

$$stt = \quad t^3 - \frac{t^5}{3} + \frac{t^7}{5} - \frac{t^9}{7} + \text{etc.},$$

$$s + stt = \quad t + \frac{2}{3}\, t^3 - \frac{2}{3\cdot 5}\, t^5 + \frac{2}{5\cdot 7}\, t^7 - \text{etc.} = t +$$

ergo

$$s' = \frac{2}{3}\, t - \frac{2}{3\cdot 5}\, t^3 + \frac{2}{5\cdot 7}\, t^5 - \frac{2}{7\cdot 9}\, t^7 + \text{etc.},$$

hinc

$$s'tt = \qquad \frac{2}{1\cdot 3}\, t^3 - \frac{2}{3\cdot 5}\, t^5 + \frac{2}{5\cdot 7}\, t^7 - \text{etc.}$$

$$s'(1+tt) = \quad \frac{2}{3}\quad t + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\, t^3 - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}\, t^5 + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}\, t^7 - \text{etc.} =$$

ergo

$$s'' = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\, t - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}\, t^3 + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9}\, t^5 - \text{etc.},$$

$$s''tt = \qquad \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\, t^3 - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}\, t^5 + \text{etc.}$$

$$s''(1+tt) = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\, t + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\, t^3 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\, t^5 + \text{etc.} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$$

$$s''' = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\, t - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\, t^3 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\, t^5 - \text{etc.},$$

$$s'''tt = \qquad + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\, t^3 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\, t^5 + \text{etc.}$$

$$s'''(1+tt) = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\, t + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\, t^3 - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\, t^5 + \text{etc.}$$

etc.

5. Colligamus iam singulas substitutiones hic factas, quae sunt

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{s'tt}{1+tt},$$

$$s' = \frac{2t}{3(1+tt)} + \frac{s''tt}{1+tt},$$

$$s'' = \frac{2\cdot 4t}{3\cdot 5(1+tt)} + \frac{s'''tt}{1+tt},$$

$$s''' = \frac{2\cdot 4\cdot 6t}{3\cdot 5\cdot 7(1+tt)} + \frac{s''''tt}{1+tt}$$

etc.

Quodsi iam valores posteriores in praecedentibus substituantur, pro a
sequens obtinebitur nova series

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.},$$

quae ad sequentem formam commodiorem reducitur

$$s = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right],$$

ubi singuli termini adhuc facilius evolvuntur quam in serie praece
propterea quod ex quolibet termino sequens immediate determinari p
Ita ex primo termino reperitur secundus, si ille per $\frac{2}{3}$ et per $\frac{tt}{1+tt}$ m
plicetur (Multiplicatio autem per $\frac{2}{3}$ fit, dum pars tertia subtrahitur). S
dus per $\frac{4}{5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)$ multiplicatus dat tertium; hic vero per $\frac{6}{7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)$ mul
catus dat quartum et ita porro. Facillime autem per fractiones $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$
multiplicatur. Praeterea vero haud exiguum est lucrum, quod omnes te
sunt positivi, eorumque ergo sola additio arcum quaesitum s suppeditat

6. Ad hanc autem novam seriem primum methodo longe alia sum
ductus, quam hic apposuisse operae erit pretium. Cum sit

$$s = \int \frac{\partial t}{1+tt},$$

extendatur, ita ut futurum sit $s = A$ tang. a.

7. Tum vero huius formulae denominatorem $1 + tt$ sub praesento

$$1 + aa - (aa - tt)$$

hincque porro sub hac

$$(1 + aa)\left(1 - \frac{aa - tt}{1 + aa}\right),$$

quo facto fractio $\frac{1}{1+tt}$ evolvetur in hanc seriem

$$\frac{1}{1+aa}\left[1 + \frac{aa - tt}{1 + aa} + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa}\right)^2 + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

sicque erit

$$s = \frac{1}{1+aa}\int \partial t \left[1 + \frac{aa - tt}{1 + aa} + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa}\right)^2 + \text{etc.}\right],$$

postquam scilicet integratio a $t = 0$ usque ad $t = a$ fuerit statim patet pro primo termino fore

$$\int \partial t = a,$$

pro secundo autem

$$\int \partial t (aa - tt) = \frac{2}{3} a^3.$$

8. At vero, quo facilius omnes termini sequentes integre aequationem evolvi conveniet

$$\int \partial t (aa - tt)^{n+1} = A \int \partial t (aa - tt)^n + Bt (aa - tt)^{n+1}$$

quae differentiata ac per $\partial t (aa - tt)^n$ divisa praebet

$$aa - tt = A + B(aa - tt) - 2(n + 1) Btt,$$

ubi duplicis generis termini occurrunt, scilicet mere constant tt affecti, qui seorsim se mutuo tollere debent.

involvat, quod evenit statuendo

$$A = 2(n+1)Baa,$$

quo facto, si aequatio insuper per $aa - tt$ dividatur, prodibit

$$1 = B(2n+3);$$

unde colligitur

$$B = \frac{1}{2n+3} \quad \text{hincque} \quad A = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa$$

sicque aequatio nostra assumta iam erit

$$\int \partial t(aa-tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa\int \partial t(aa-tt)^n + \frac{t}{2n+3}(aa-tt)^{n+1}.$$

Quare si integralia a $t=0$ usque ad $t=a$ extendantur, postremum membrum sponte abit in nihilum sicque habebimus hanc reductionem generalem

$$\int \partial t(aa-tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)aa}{2n+3}\int \partial t(aa-tt)^n.$$

10. Iam ope huius reductionis ex quolibet termino nostrae seriei facillime terminus sequens assignari poterit. Quodsi enim loco exponentis n successive omnes valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. ponamus, sequentia integralia nanciscemur

$$\int \partial t(aa-tt) = \frac{2}{3}a^3,$$

$$\int \partial t(aa-tt)^2 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a^5,$$

$$\int \partial t(aa-tt)^3 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}a^7,$$

$$\int \partial t(aa-tt)^4 = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}a^9$$

etc.

$$s = \text{A tang. } a = \frac{1}{1+aa}\left(a + \frac{\frac{2}{3}a^3}{1+aa} + \frac{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a^5}{(1+aa)^2} + \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}a^7}{(1+aa)^3} + \text{etc.}\right)$$

unde, si loco a restituamus t, orietur ipsa series methodo praeced venta, scilicet

$$s = \text{A tang. } t = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \right.$$

12. Nunc igitur hanc novam seriem ad nostrum institutum pro commodemus, et quoniam supra primo hanc habuimus aequationem

$$\pi = 4 \text{ A tang. } \frac{1}{2} + 4 \text{ A tang. } \frac{1}{3},$$

pro priore parte, ubi $t = \frac{1}{2}$, obtinebimus hanc seriem

$$\text{A tang. } \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right).$$

pro altera autem parte, ubi $t = \frac{1}{3}$, erit

$$\text{A tang. } \frac{1}{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right);$$

consequenter valor ipsius π per binas sequentes series exprimetur

$$\pi = \left\{\begin{aligned} &\frac{16}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + &\frac{12}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right]\end{aligned}\right\};$$

ipsum denarium atque hae series adeo magis convergunt.

13. Lucrum autem adhuc multo erit maius, si forma

$$\pi = 8\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{1}{3} + 4\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{1}{7}$$

per novam seriem evolvatur, cuius pars prior iam est evoluta; pro alter autem, ubi $t = \frac{1}{7}$, nunc habebimus

$$\mathrm{A\ tang.}\,\frac{1}{7} = \frac{7}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{50^3} + \text{etc.}\right).$$

Hinc igitur nanciscemur sequentes series pro valore semiperipheriae π indagando

$$\pi = \begin{cases} \dfrac{24}{10}\left[1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{10}\right) + \dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\dfrac{1}{10}\right)^2 + \dfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\dfrac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + \dfrac{28}{50}\left[1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{100}\right) + \dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\dfrac{2}{100}\right)^2 + \dfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\dfrac{2}{100}\right)^3 + \text{etc.}\right] \end{cases};$$

haeque duae series sunt aptissimae ad valorem ipsius π ad quotcunque figura decimales exprimendum, propterea quod singuli termini ex praecedentibu facillime formantur atque adeo prioris seriei termini iam in ratione decupl posterioris vero in *quinquies decupla* decrescunt. Unde, si quis hunc valoror ad 128 figuras definire vellet, pro priore serie computare deberet termino centum viginti octo, posterioris vero septuaginta quinque tantum.

14. Quo usus harum serierum clarius appareat, utriusque seriei oct terminos priores in fractiones decimales evolvamus; eritque

PRO PARTE PRIORE

term.	I.	= 2,4 etc.
—	II.	= - 1 6 etc.
—	III.	= - - 1 2 8 etc.
—	IV.	= - - - 1 0 9,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4
—	V.	= - - - - - 9 7,5 2 3 8 0 9,5 2 3 8 0 9,5 2 3 8 0 9,5 2
—	VI.	= - - - - - - 8,8 6 5 8 0 0,8 6 5 8 0 0,8 6 5 8 0 0,8 6
—	VII.	= - - - - - - - 8 1,8 3 8 1 6 1,8 3 8 1 6 1,8 3 8 1 6 1,
—	VIII.	= - - - - - - - - 7 6,3 8 2 2 8 4,3 8 2 2 8 4,3 8 2 2 8
Pars	I.	= 2,5 7 4 0 0 4 4 2 7 | 2 3 1 4 3 5 2 3 1 4 3 5 | 2 3 1 4 3

PRO PARTE POSTERIORE

term.	I.	= 0,5 6 0 etc.
—	II.	= - - - 7 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
—	III.	= - - - - 1 1 9 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
—	IV.	= - - - - - - 2 0 4 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
—	V.	= - - - - - - - - 3 6 4 0 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
—	VI.	= - - - - - - - - - - 6 6 1 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7
—	VII.	= - - - - - - - - - - - 1 2 2 2,1 1 6 5 5 0,1 1 6 5 5 0
—	VIII.	= - - - - - - - - - - - - - 2 2 8 1 2,8 4 2 2 6 8,8 4 2
Pars	II.	= 0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 1 3 1 | 4 1 2 5 8 7 | 4 1 2

Hinc patet istas summas octo priorum terminorum, ob revolutiones in figuris occurrentes, sine ullo labore ad quotcunque figuras contin

15. Ex hoc schemate iam statim verus valor ipsius π ad o usque assignari poterit. Cum enim octo priorum terminorum sum

$$\begin{aligned} \text{partis prioris} &= 2{,}5\,7\,4\,0\,0\,4\,4\,3, \\ \text{partis posterioris} &= 0{,}5\,6\,7\,5\,8\,8\,2\,2, \\ \hline \text{erit valor ipsius } \pi &= 3{,}1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\,5, \end{aligned}$$

ubi ne in ultima quidem figura erratur. Facile autem iste calculus ad pl figuras extendi potest, propterea quod termini octavum subsequentes ex ipso sine difficultate computantur. Est enim

PRO PARTE PRIORE

$$\begin{aligned} \text{terminus IX.} &= \tfrac{1}{10}\left(1-\tfrac{1}{17}\right) \text{ VIII.} \\ \text{— X.} &= \tfrac{1}{10}\left(1-\tfrac{1}{19}\right) \text{ IX.} \\ \text{— XI.} &= \tfrac{1}{10}\left(1-\tfrac{1}{21}\right) \text{ X.} \end{aligned}$$

etc.,

PRO PARTE POSTERIORE

$$\begin{aligned} \text{terminus IX.} &= \tfrac{2}{100}\left(1-\tfrac{1}{17}\right) \text{ VIII.} \\ \text{— X.} &= \tfrac{2}{100}\left(1-\tfrac{1}{19}\right) \text{ IX.} \\ \text{— XI.} &= \tfrac{2}{100}\left(1-\tfrac{1}{21}\right) \text{ X.} \end{aligned}$$

etc.

16. Quo usus harum formularum magis elucescat, quaeramus valo ipsius π usque ad 16 figuras; et calculus erit

PRO PARTE PRIORE

I. . . . VIII.		$= 2{,}5\,7\,4\,0\,0\,4\,4\,2\,7\,2\,3\,1\,4\,3\,5\,2\,3$
term.	IX.	$= \text{- - - - - - - - -}\,7\,1\,8\,8\,9\,2\,0\,8\,8$
—	X.	$= \text{- - - - - - - - - - -}\,6\,8\,1\,0\,5\,5\,6\,6$
—	XI.	$= \text{- - - - - - - - - - - -}\,6\,4\,8\,6\,2\,4\,4$
—	XII.	$= \text{- - - - - - - - - - - - -}\,6\,2\,0\,4\,2\,3$
—	XIII.	$= \text{- - - - - - - - - - - - - -}\,5\,9\,5\,6\,1$
—	XIV.	$= \text{- - - - - - - - - - - - - - -}\,5\,7\,3\,5$
—	XV.	$= \text{- - - - - - - - - - - - - - - -}\,5\,5\,4$
—	XVI.	$= \text{- - - - - - - - - - - - - - - - -}\,5\,4$
Summa		$= 2{,}5\,7\,4\,0\,0\,4\,4\,3\,5\,1\,7\,3\,1\,3\,7\,4\,8$

PRO PARTE POSTERIORE

I. . . . VIII.		$= 0{,}5\,6\,7\,5\,8\,8\,2\,1\,8\,4\,1\,6\,6\,5\,1\,3\,1$
term.	IX.	$= \text{- - - - - - - - - - - - - - - -}\,4\,2\,9$
—	X.	$= \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -}\,8$
Pars	II.	$= 0{,}5\,6\,7\,5\,8\,8\,2\,1\,8\,4\,1\,6\,6\,5\,5\,6\,8$[1]
Pars	I.	$= 2{,}5\,7\,4\,0\,0\,4\,4\,3\,5\,1\,7\,3\,1\,3\,7\,4\,8$
hinc π		$= 3{,}1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\,5\,3\,5\,8\,9\,7\,9\,3\,1\,6$[2]

17. Possunt vero etiam aliae huiusmodi formulae pro π inveniri, adhuc magis convergant ac pariter per potestates denarii procedant. enim in genere sit

$$\mathrm{A\ tang.}\,\frac{\alpha}{a} = \mathrm{A\ tang.}\,\frac{\beta}{b} + \mathrm{A\ tang.}\,\frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab},$$

si sumamus $t = \frac{\alpha}{a}$ vel $\frac{\beta}{b}$, erit

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha + aa} \quad \text{vel} \quad \frac{\beta\beta}{\beta\beta + bb},$$

sumto vero

$$t = \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab}$$

1) Editio princeps: 7. C. B.

2) Editio princeps: 5. Correctae ultimae duae figurae sunt 23. C. B.

18. Quoniam igitur habuimus hanc formulam

$$\pi = 8\, A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} + 4\, A \operatorname{tang.} \frac{1}{7},$$

loco prioris arcus ope reductionis allatae duos alios introducamus p
scilicet $\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{3}$; et pro $\frac{\beta}{b}$ sumamus $\frac{1}{7}$ fietque tertius arcus $= A \operatorname{tang.} \frac{2}{11}$, it

$$A \operatorname{tang.} \frac{1}{3} = A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} + A \operatorname{tang.} \frac{2}{11},$$

quo valore substituto formula nostra erit

$$\pi = 12\, A \operatorname{tang.} \frac{1}{7} + 8\, A \operatorname{tang.} \frac{2}{11},$$

cuius arcum priorem iam ante evolvimus. At vero ob

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{4}{125} = \frac{32}{1000}$$

pro altero habebimus

$$A \operatorname{tang.} \frac{2}{11} = \frac{22}{125}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{32}{1000}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{32}{1000}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{32}{1000}\right)^3 + \text{etc}\right.$$

Verum hic continua multiplicatio per numerum 32 non satis ad calcu
idonea, praecipue autem haec series minus convergit quam quae e
deducta.

19. Hanc ob caussam penitus reiiciamus istum arcum, eiusque
reductionis supra datae substituamus duos novos arcus, quorum alte
statuendo $\frac{\alpha}{a} = \frac{2}{11}$ et $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{7}$, hincque fiet

$$\frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab} = \frac{3}{79},$$

hincque

$$\pi = 20\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{1}{7} + 8\,\mathrm{A\ tang.}\,\frac{3}{79}.$$

Ubi notetur, posito $t = \frac{3}{79}$ fore

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{100000},$$

quae fractio propemodo est $\frac{1}{700}$; unde patet hanc seriem

$$\mathrm{A\ tang.}\,\frac{3}{79} = \frac{237}{6250}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 \right.$$

maxime convergere eiusque terminos propemodum septinge

20. Ista igitur series maxime est notatu digna propter
gentiam, atque adeo plurimum operae pretium erit multi
non deterreri, quippe quae, bis per 12 multiplicando, faci
Per 12 autem multiplicare vix difficilius est quam per 2.
ambos istos arcus per nostram novam seriem; atque impetr
formam

$$\pi = \begin{cases} \dfrac{28}{10}\left[1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{100}\right) + \dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\dfrac{2}{100}\right)^2 + \dfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\right. \\ + \dfrac{30336}{100000}\left[1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{144}{100000}\right) + \dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\dfrac{144}{100000}\right)^2 + \text{etc.}\right] \end{cases}$$

Hic igitur coëfficiens prioris seriei quinquies maior est q
etiam singuli termini ibi exhibiti toties maiores sunt capie
octo priorum terminorum erit

2, 8 3 7 9 4 1 0 9 2 0 8 3 2 7[1]) 6 5 | 7 0 6 2 9 3 | 7 0 6 2 9

octavus autem terminus

0,0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 4 0 6 4 | 2 1 1 3 4 4 | 2 1 1 3 4

ex quo iam sequentes termini facile colliguntur.

1) Editio princeps: 5. O. B.

mino sequens obtineatur, dum ille bis per 12 multiplicetur et a producto debita pars subtrahatur nullo respectu habito ad loca ciphrarum decimalium, quandoquidem ex hoc capite aberrari nequit, dum satis constat, quoties quilibet terminus minor est praecedente. Talem calculum pro sex prioribus terminis hic exhibeamus.

term. I. =	0,3 0 3 3 6
	3 6 4 0 3 2
3.	4 3 6 8 3 8 4
	1 4 5 6 1 2 8
term. II. =	2 9 1 2 2 5 6
	3 4 9 4 7 0 7 2
5.	4 1 9 3 6 4 8 6 4
	8 3 8 7 2 9 7 2 8
term. III.	3 3 5 4 9 1 8 9 1 2
	4 0 2 5 9 0 2 6 9 4 4
7.	4 8 3 1 0 8 3 2 3 3 2 8
	6 9 0 1 5 4 7 4 7 6 1,1 4 2 8 5 7,1 4 2 8 5 7,1 4 2 etc.
term. IV. =	4 1 4 0 9 2 8 4 8 5 6 6,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2,8 5 7 etc.
	4 9 6 9 1 1 4 1 8 2 8 0 2,2 8 5 7 1 4,2 8 5 7 1 4,2 8 5 etc.
9.	5 9 6 2 9 3 7 0 1 9 3 6 2 7,4 2 8 5 7 1,4 2 8 5 7 1,4 2 8 etc.
	6 6 2 5 4 8 5 5 7 7 0 6 9,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 etc.
term. V. =	5 3 0 0 3 8 8 4 6 1 6 5 5 7,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 etc.
	6 3 6 0 4 6 6 1 5 3 9 8 6 9 2,5 7 1 4 2 8,5 7 1 4 2 8,5 7 1 etc.
11.	7 6 3 2 5 5 9 3 8 4 7 8 4 3 1 0,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2,8 5 7 etc.
	6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 etc.
term. VI. =	6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 etc.

unde ipsos terminos desumamus et in unam summam colligamus:

term.	I. =	0,3 0 3 3 6
—	II. =	2 9 1 2 2 5 6
—	III. =	3 3 5 4 9 1 8 9 1 2
—	IV. =	4 1 4 0 9 2 8 4 8 5 6 6,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2
—	V. =	5 3 0 0 3 8 8 4 6 1 6 5 5 7,7 1 4 2 8 5,7
—	VI. =	6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6
Summa	=	0,3 0 3 6 5 1 5 6 1 5 0 6 5 1 4 7 8 1 2 8 2 0 5 7 7 0 0 3 9 1,8 9 6 1 0 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 etc.,

ubi imprimis notatu dignum occurrit, quod summa quinque priorum norum absolute exhiberi potest, dum scilicet fractio decimalis in figu abrumpitur, haecque postrema formula pro π data ad calculum maxime accommodata.

22. Ex eodem principio, unde nostram seriem deduximus, aliae series derivari possunt pariter maxime convergentes. Inchoando sci serie vulgari

$$\text{A tang. } t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$$

ponamus huius seriei iam n terminos actu esse collectos, quorum sum

$$\Sigma = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \cdots \pm \frac{t^{2n-1}}{2n-1}.$$

Summam autem sequentium terminorum statuamus

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.},$$

ita ut sit

$$\text{A tang.}\, t = \Sigma \pm s,$$

ubi ergo numerus Σ tanquam iam inventus spectatur, alter vero s investigari debeat.

23. Ratiocinium igitur eodem modo instituamus, ut supra § 4, quas operationes hic apponamus.

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.},$$

$$stt = \qquad + \frac{t^{2n+3}}{2n+1} - \frac{t^{2n+5}}{2n+3} + \text{etc.},$$

$$s(1+tt) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.}$$
$$= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + s'tt,$$

ergo

$$s' = \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+3}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.},$$

$$s'tt = \qquad + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \text{etc.},$$

$$s'(1+tt) = \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2\cdot 4t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} - \text{etc.}$$
$$= \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + s''tt$$

etc.

24. Quodsi iam valores introducti restituantur, facile patet tandem ad hanc seriem perventum iri

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(1+tt)^2}$$
$$+ \frac{2\cdot 4t^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(1+tt)^3} + \text{etc.},$$

quae expressio contrahitur in sequentem

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)}\left(1 + \frac{2tt}{(2n+3)(1+tt)} + \frac{2\cdot 4t^4}{(2n+3)(2n+5)(1+tt)}\right.$$

haecque series utique aliquanto magis convergit quam praecede quod denominatores multo maiores sunt quam numeratores; ver mulae ante exhibitae his seriebus longissime anteferendae viden ad usum practicum respiciamus.

DE NOVO GENERE SERIERUM RATIONALIUM ET VALDE CONVERGENTIUM QUIBUS RATIO PERIPHERIAE AD DIAMETRUM EXPRIMI POTEST[1]

Conventui exhibita die 17. Iunii 1779

Commentatio 706 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 150—154

Summarium ibidem p. 169

SUMMARIUM

Ce nouveau genre de séries est aussi déduit de la décomposition

$$\pi = 8 \text{ A tang. } \frac{1}{3} + 4 \text{ A tang. } \frac{1}{7};$$

le principe du développement de ces arcs en séries est très différent de celui du [mém]oire précédent. Le voici: Comme

$$\text{A tang. } \frac{x}{2-x} = \int \frac{\partial x}{2-2x+xx} = 2\int \frac{\partial x}{4+x^4} + 2\int \frac{x\partial x}{4+x^4} + \int \frac{xx\partial x}{4+x^4},$$

[on a]ura par les procédés connus

$$\text{A tang. } \frac{x}{2-x} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + \frac{xx}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + \frac{x^3}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right] \end{array} \right\}.$$

1) Confer hac cum dissertatione praecedentem et alias in nota 1 ad p. 1 adiecta laudatas. C. B.

En mettant donc premièrement $x = \frac{1}{2}$ et ensuite $x = \frac{1}{4}$, on aura trois séries et autant pour *A tang.* $\frac{1}{7}$, et la *circonférence* π *sera exprimée par six séries* cèdent selon des puissances de 2, c'est-à-dire les trois premières selon les p et les trois dernières selon les puissances de $\frac{1}{1024}$, par conséquent toutes ex vergentes et, de plus, très commodes pour le calcul.

1. Principium, unde hae series sunt deductae, situm est in binomiali: $4 + x^4$, quam constat involvere hos duos factores rati

$$2 + 2x + xx \quad \text{et} \quad 2 - 2x + xx.$$

Hinc enim statim sequitur hanc formulam integralem

$$\int \frac{\partial x(2 + 2x + xx)}{4 + x^4},$$

quam signo $\odot$ indicemus, reduci ad hanc

$$\odot = \int \frac{\partial x}{2 - 2x + xx},$$

cuius integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x = 0$, est A tan observetur

$$\text{casu } x = 1 \quad \text{esse} \quad \odot = \frac{\pi}{4};$$

at vero

$$\text{casu } x = \frac{1}{2} \quad \text{erit} \quad \odot = \text{A tang.} \frac{1}{3},$$

tum vero

$$\text{casu } x = \frac{1}{4} \quad \text{erit} \quad \odot = \text{A tang.} \frac{1}{7}.$$

Notum autem est esse[1])

$$2 \text{ A tang.} \frac{1}{3} + \text{A tang.} \frac{1}{7} = \text{A tang.} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

---

1) Confer praecedentis Commentationis § 3, huius voluminis p. 5. O. B.

2. Cum igitur formula integralis illa signo $\odot$ indicata tribus constet partibus, singulas seorsim evolvamus, quas brevitatis gratia sequentibus characteribus insigniamus

$$\text{I. } \int \frac{\partial x}{4+x^4} = ♄, \quad \text{II. } \int \frac{x\partial x}{4+x^4} = ♃, \quad \text{III. } \int \frac{xx\partial x}{4+x^4} = ♂,$$

ita ut sit

$$\odot = 2♄ + 2♃ + ♂ = \text{A tang. } \frac{x}{2-x}.$$

Nunc igitur istas tres formulas integrales more solito in series infinitas evolvamus inde formandas, quod sit

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{4^2} - \frac{x^{12}}{4^3} + \frac{x^{16}}{4^4} - \text{etc.}\right).$$

3. Quodsi iam primo istam seriem ducamus in ∂x et integremus, prima formula, ♄, per sequentem seriem exprimetur

$$♄ = \frac{x}{4}\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

At vero illa series ducta in $x\partial x$ et integrata dabit

$$♃ = \frac{xx}{8}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Denique eadem series ducta in $xx\partial x$ et integrata praebet

$$♂ = \frac{x^3}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{11}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

4. Cum igitur sit

$$\odot = 2♄ + 2♃ + ♂,$$

evolvamus seorsim casus initio memoratos, quibus est vel
vel $x = \frac{1}{4}$, quorum primo est $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$, secundo vero est $\frac{x^4}{4}$
$\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$: unde patet binos casus posteriores maxime conver
ipsa prima, cuius termini in ratione quadrupla decrescunt, ian
quam series LEIBNITIANA sumto arcu, cuius tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, p
hic calculus nulla irrationalitate perturbatur.

EVOLUTIO CASUS PRIMI, QUO $x = 1$ ET $\odot = $ A ta

5. Cum igitur hic sit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$, tres nostrae series pri
sequenti modo procedent.

$$♄ = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \right.$$

$$♃ = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \right.$$

$$♂ = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \right.$$

6. Cum igitur sit

$$\odot = 2♄ + 2♃ + ♂ = \frac{\pi}{4},$$

per 4 multiplicando valor ipsius π per sequentes tres series

$$\pi = \begin{cases} \quad 2\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{1}{17}\cdot\frac{1}{4^4} - \right. \\ + 1\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4^4} - \right. \\ + 1\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{4^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{1}{19}\cdot\frac{1}{4^4} - \right. \end{cases}$$

7. Ex his certe ternis seriebus ratio peripheriae ad d
minore labore computari potuisset, quam ex serie LEIBNITIA

gulis, secundus ad 100 ac postre-
adeo usque ad 128 determinavit. At vero sequentes casus multo magis
m laborem sublevare possent.

EVOLUTIO CASUS SECUNDI, QUO $x = \frac{1}{2}$

8. Hoc igitur casu erit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{64}$, unde tres illae series sequenti modo
rentur

$$\text{♄} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right),$$

$$\text{♃} = \frac{1}{32}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right),$$

$$\text{♂} = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right).$$

9. Cum igitur

$$2\text{♄} + 2\text{♃} + \text{♂} = \text{A tang.}\,\frac{1}{3},$$

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{3} = \left\{\begin{array}{l} \quad\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)\\ + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)\\ + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)\end{array}\right\}.$$

autem hic tres computandae sunt series, tamen, quia singulae secundum
em rationem 1 : 64 decrescunt, laborem mirum in modum contrahere licebit.

1) Vide notas 2), 3), 4) p. 3 huius voluminis adiectas. C. B.

EVOLUTIO CASUS TERTII, QUO $x = \frac{1}{4}$

10. Cum igitur hic sit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$, series nostrae tres principales habebunt

$$♄ = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right),$$

$$♃ = \frac{1}{128}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right),$$

$$♂ = \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right).$$

11. Cum igitur

$$2♄ + 2♃ + ♂ = \text{A tang.}\,\frac{1}{7},$$

erit his seriebus debite iunctis

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{7} = \left\{\begin{array}{l} \;\;\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{64}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

APPLICATIO BINORUM CASUUM POSTERIORUM AD PERIPHERIAM CIRCULI PER SERIES MAXIME CONVERGENTES EXPRIMENDAM

12. Cum sit, uti iam observavimus,

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3} + \text{A tang.}\,\frac{1}{7},$$

erit

$$\pi = 8\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3} + 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{7};$$

seriebus supra inventis substitutis valor ipsius π per sex sequentes series coniunctim exprimetur:

$$\pi = \begin{cases} \quad 2\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{64}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Hic ergo maxime notatu dignum occurrit, quod omnes istae series per solas potestates binarii procedant.

DE EVOLUTIONE
POTESTATIS POLYNOMIALIS CUIUSCUNQ

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$$

Conventui exhibita die 6. Julii 1778

Commentatio 709 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 47–

Summarium ibidem p. 63—64

SUMMARIUM

Tous les Géomètres connoissent la signification des caractères $\left(\frac{n}{0}\right)$, $\left(\frac{n}{1}\right)$, (
dont feu Mr. EULER s'est servi pour indiquer les coëfficiens de la n^{me} puissance
et les grands avantages qu'il a retiré de ce symbolisme pour découvrir plusieu
remarquables de ces coëfficiens. Dans le présent Mémoire, son dessein a été d
les coëfficiens de la n^{me} puissance du trinome, qu'il désigne par les caractères
$\left(\frac{n}{2}\right)^3$ etc., au moyen de ceux du binome, $\left(\frac{n}{0}\right)^2$, $\left(\frac{n}{1}\right)^2$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ etc., de même que l
du quadrinome par ceux du trinome, et ainsi de suite.

Pour effectuer ceci, il développe le trinome $(1 + x(1 + x))^n$; et comme le t
de cette puissance développée est $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x)^\alpha$, en développant $(1 + x)^\alpha$, le t
sera $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 x^\beta$. Ainsi le coëfficient du terme $x^{\alpha+\beta}$ sera $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2$; de sorte que,

1) Confer hac cum Commentatione praeter Commentationes 326 et 551 praec
Commentationem 722 huiusce voluminis. C. B.

coëfficient $\binom{n}{\lambda}^3$ de la puissance x^λ dans le trinome $(1+x+xx)^n$ développé, on n'a qu'à donner à α et β toutes les valeurs en nombres entiers qui rendent $\alpha+\beta=\lambda$, et on aura

$$\binom{n}{\lambda}^3=\binom{\lambda}{0}^2\binom{n}{\lambda}^2+\binom{\lambda-1}{1}^2\binom{n}{\lambda-1}^2+\binom{\lambda-2}{2}^2\binom{n}{\lambda-2}^2+\text{etc.}$$

D'une manière semblable l'auteur procède pour trouver le coëfficient $\binom{n}{\lambda}^4$ de la puissance x^λ dans le quadrinome développé $(1+x+x^2+x^3)^n$ et le coëfficient $\binom{n}{\lambda}^5$ du même terme x^λ dans le quinome $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$, ce qui le conduit enfin à l'expression générale du coëfficient $\binom{n}{\lambda}^{\theta+1}$ du terme x^n dans le polynome développé

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^\theta)^n,$$

qui est

$$\binom{n}{\lambda}^{\theta+1}=\binom{n}{\lambda}^2\binom{\lambda}{0}^\theta+\binom{n}{\lambda-1}^2\binom{\lambda-1}{1}^\theta+\binom{n}{\lambda-2}^2\binom{\lambda-2}{2}^\theta+\text{etc.}$$

1. Incipiamus a potestate binomiali $(1+x)^n$, qua more solito evoluta designemus coëfficientem potestatis cuiusvis x^λ hoc charactere $\binom{n}{\lambda}$, ita ut sit

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}xx+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{4}x^4+\cdots+\binom{n}{n}x^n,$$

ubi ergo erit

$$\binom{n}{1}=n,\quad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\quad \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\quad \text{etc.},$$

et in genere

$$\binom{n}{\lambda}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda},$$

unde patet casu $\lambda=0$ et $\lambda=n$ fore

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

atque adeo in genere

$$\binom{n}{\lambda}=\binom{n}{n-\lambda}.$$

Praeterea vero notasse iuvabit tam casibus, quibus λ est num
quam quibus est numerus maior quam n, significatum formu
esse nihilo aequalem.

2. Quoniam per hos characteres calculus non mediocrite
contrahitur, similibus characteribus utamur etiam in evoluti
trinomialium, quadrinomialium et generatim polynomialium
Hunc in finem superioribus characteribus pro binomio adhib
quasi exponentem 2, quandoquidem hinc nulla ambiguitas est
niam in huiusmodi calculis nullae potestates horum charact
solent; hoc modo pro evolutione potestatis binomialis habebi

$$(1+x)^n = \left(\frac{n}{0}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x + \left(\frac{n}{2}\right)^2 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^2 x^3 + \text{etc}$$

ubi ergo meminisse oportet esse in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n}{n-\lambda}\right)^2,$$

tum vero perpetuo

$$\left(\frac{n}{0}\right)^2 = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$$

atque has formulas in nihilum abire casibus, quibus est λ v
teger negativus vel positivus maior quam n.

3. Iisdem igitur characteribus utemur pro evolutione p
nomialium quarumcunque, dummodo pro trinomialibus adiung
ponentem ternarium, pro quadrinomialibus quaternarium, pro
quinarium et ita porro, hoc scilicet modo:

Pro trinomialibus $(1+x+xx)^n$ evolutio praebeat

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^3 x + \left(\frac{n}{2}\right)^3 x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^3 x^4 + \text{etc.}$$

Pro quadrinomialibus $(1+x+xx+x^3)^n$ evolutio praebeat

$$\left(\frac{n}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{1}\right)^4 x + \left(\frac{n}{2}\right)^4 x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^4 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^4 x^4 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right) x + \left(\frac{n}{2}\right) xx + \left(\frac{n}{3}\right) x^3 + \left(\frac{n}{4}\right) x^4 + \left(\frac{n}{5}\right) x^5 + \text{etc.}$$

etc.

4. His explicatis inquiramus in veros valores horum characterum ex-
ntibus 3, 4, 5, 6 etc. insignitorum et videamus, quomodo illi per charac-
binario notatos, quippe quorum significatus est notissimus, determinari
nt. Singulos igitur casus harum potestatum polynomialium ordine per-
mus.

EVOLUTIO POTESTATIS TRINOMIALIS

$$(1 + x + xx)^n$$

5. Seriem hinc oriundam hoc modo repraesentemus

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^3 x + \left(\frac{n}{2}\right)^3 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^3 x^4 + \text{etc.},$$

terminus ultimus erit $= \left(\frac{n}{2n}\right)^3 x^{2n}$, ubi coëfficientem $\left(\frac{n}{2n}\right)^3$ iam novimus
mitati aequalem, perinde ac terminum primum $\left(\frac{n}{0}\right)^3$; tum vero, quia
cientes isti retro eodem ordine progrediuntur, hinc sequitur fore

$$= \left(\frac{n}{2n-1}\right)^3, \quad \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-2}\right)^3 \quad \text{atque adeo in genere} \quad \left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-\lambda}\right)^3.$$

hic evidens est valorem formulae $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$ in nihilum abire tam casibus,
s λ est numerus integer negativus, quam casibus, quibus est positivus
quam $2n$.

6. Ante autem quam determinationem horum characterum suscipiamus,
incongruum erit evolutionem casuum simpliciorum ante oculos posuisse:

n	$(1+x+xx)^n$
0	1
1	$1 + x + xx$
2	$1 + 2x + 3xx + 2x^3 + x^4$
3	$1 + 3x + 6xx + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$1 + 4x + 10xx + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$
5	$1 + 5x + 15xx + 30x^3 + 45x^4 + 51x^5 + 45x^6 + 30x^7 + 15x^8 + 5x^9 + x$
6	$1 + 6x + 21xx + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 + 126x^7 + 90x^8 + 50x^9 +$
	etc.

Ex ultimo casu, quo $n = 6$, patet igitur esse

$$\left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1, \quad \left(\frac{6}{1}\right)^3 = 6, \quad \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 12$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)^3 = 141,$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = 126, \quad \left(\frac{6}{8}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{9}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{10}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{11}\right)^3 = 6, \quad \left(\frac{6}{12}\right)^3 = 1.$$

7. Ut nunc investigemus, quomodo hi characteres ex trinomio orti similes characteres ex binomio ortos exprimi queant, potestatem proposit sub forma binomiali repraesentemus hoc modo

$$[1 + x(1+x)]^n,$$

cuius evolutio ergo praebebit hanc progressionem

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1+x) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 xx(1+x)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 x^3(1+x)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 x^4(1+x)^4 + \text{etc}$$

cuius terminus generalis hanc habebit formam

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1+x)^\alpha.$$

potestas x^λ, quatenus quidem in iis continetur. Forma autem generalis es $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha(1+x)^\alpha$; unde ob

$$(1+x)^\alpha = 1 + \left(\frac{\alpha}{1}\right)^2 x + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 x^3 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 x^4 + \text{etc.},$$

quia hic occurrit generatim terminus $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 x^\beta$, is ductus in $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha$ praebe $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^{\alpha+\beta}$. Quodsi ergo fuerit $\alpha+\beta=\lambda$, coëfficiens $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2$ pars er coëfficientis quaesiti $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$.

9. Quamobrem ad valorem coëfficientis $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$ eruendum tantum opus e litteris α et β omnes valores in integris tribuere, quibus prodire pote $\alpha+\beta=\lambda$. Evidens autem est ambos hos numeros α et β neque negativ neque maiores quam n capi debere, quia alioquin ista forma evanesceret; tu vero, etiam si esset $\beta>\alpha$, formula $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ pariter esset nulla. Hinc igitur max mus valor pro α assumendus erit $=\lambda$, tum vero $\beta=0$; unde sequitur

$$\begin{array}{lllllll} \text{si} & \alpha=\lambda, & \lambda-1, & \lambda-2, & \lambda-3, & \lambda-4 & \text{etc.,} \\ \text{fore} & \beta=0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \text{etc.} \end{array}$$

10. Producta igitur ex singulis his casibus orta et in unam summa collecta dabunt valorem quaesitum characteris $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$, ita ut nacti simus ha determinationem

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{\lambda}{0}\right)^2\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^2\left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^2\left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda-3}{3}\right)^2\left(\frac{n}{\lambda-3}\right)^2 + \text{et}$$

sicque iste valor per partes cognitas exprimitur, quarum numerus quovis ca est finitus.

ipsi λ valores 0, 1, 2, 3, 4 etc., eritque ut sequitur:

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0}\right)^2\left(\frac{n}{1}\right)^2 = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{0}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2\left(\frac{n}{1}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + n =$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{0}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{1}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{0}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{1}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{0}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{1}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{n}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{7}{0}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{n}{4}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{n}{7}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \left(\frac{8}{0}\right)^2\left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{1}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2\left(\right.$$

$$\binom{n}{9}^{3} = \binom{9}{0}^{2}\binom{n}{9}^{2} + \binom{8}{1}^{2}\binom{n}{8}^{2} + \binom{7}{2}^{2}\binom{n}{7}^{2} + \binom{6}{3}^{2}\binom{n}{6}^{2} + \binom{5}{4}^{2}\binom{n}{5}^{2}$$

o

$$\binom{n}{9}^{3} = \binom{n}{9}^{2} + 8\binom{n}{8}^{2} + 21\binom{n}{7}^{2} + 20\binom{n}{6}^{2} + 5\binom{n}{5}^{2},$$

$$\binom{n}{10}^{3} = \binom{10}{0}^{2}\binom{n}{10}^{2} + \binom{9}{1}^{2}\binom{n}{9}^{2} + \binom{8}{2}^{2}\binom{n}{8}^{2} + \binom{7}{3}^{2}\binom{n}{7}^{2} + \binom{6}{4}^{2}\binom{n}{6}^{2} + \binom{5}{5}^{2}\binom{n}{5}^{2}$$

e

$$\binom{n}{10}^{3} = \binom{n}{10}^{2} + 9\binom{n}{9}^{2} + 28\binom{n}{8}^{2} + 35\binom{n}{7}^{2} + 15\binom{n}{6}^{2} + \binom{n}{5}^{2}$$

etc.

12. Applicemus haec exempli loco ad casum $n = 6$, quippe quem supra iam evolvimus; ac reperiemus:

$$\binom{6}{0}^{3} = 1,$$

$$\binom{6}{1}^{3} = 6,$$

$$\binom{6}{2}^{3} = 21,$$

$$\binom{6}{3}^{3} = \binom{6}{3}^{2} + 2\binom{6}{2}^{2} = 50,$$

$$\binom{6}{4}^{3} = \binom{6}{4}^{2} + 3\binom{6}{3}^{2} + \binom{6}{2}^{2} = 15 + 3\cdot 20 + 15 = 90,$$

$$\binom{6}{5}^{3} = \binom{6}{5}^{2} + 4\binom{6}{4}^{2} + 3\binom{6}{3}^{2} = 6 + 4\cdot 15 + 3\cdot 20 = 126,$$

$$\binom{6}{6}^{3} = \binom{6}{6}^{2} + 5\binom{6}{5}^{2} + 6\binom{6}{4}^{2} + \binom{6}{3}^{2} = 1 + 5\cdot 6 + 6\cdot 15 + 20 = 141,$$

$$\binom{6}{7}^{3} = \binom{6}{7}^{2} + 6\binom{6}{6}^{2} + 10\binom{6}{5}^{2} + 4\binom{6}{4}^{2} = 6 + 10\cdot 6 + 4\cdot 15 = 126,$$

erit utique

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 126;$$

simili modo erit

$$\left(\frac{6}{8}\right)^3 = \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{11}\right.$$

ac denique

$$\left(\frac{6}{12}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1,$$

qui valores cum supra datis egregie conveniunt.

EVOLUTIO POTESTATIS QUADRINOMIALIS

$$(1 + x + xx + x^3)^n$$

13. Valorem igitur hunc evolutum ita repraesentabimus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^4 x + \left(\frac{n}{2}\right)^4 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^4 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^4 x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)^4 x^5 + \text{et}$$

ubi scilicet est $\left(\frac{n}{0}\right)^4 = 1$. Deinde, quia ultimus terminus est x^{3n},
et quia coëfficientes retro scripti eundem ordinem servant, erit
atque in genere

$$\left(\frac{n}{3n-\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^4;$$

ubi observetur tam casibus, quibus λ est numerus integer ne
positivus maior quam $3n$, valores huius formulae in nihilum
notatis hic mihi est propositum indagare, quomodo hi characte
notati per characteres sive binario sive ternario notatos, utpot
definiri queant.

14. Antequam hunc laborem suscipiamus, casus simplici
propositae in tabula subiuncta ob oculos ponamus.

$$x + xx + x^3$$

$$+ 2x + 3xx + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$$

$$3x + 6xx + 10x^3 + 12x^4 + 12x^5 + 10x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9$$

$$+ 4x + 10xx + 20x^3 + 31x^4 + 40x^5 + 44x^6 + 40x^7 + 31x^8 + 20x^9 + \text{etc.}$$

$$+ 5x + 15xx + 35x^3 + 65x^4 + 101x^5 + 135x^6 + 155x^7 + 155x^8 + 135x^9 + \text{etc.}$$

$$+ 6x + 21xx + 56x^3 + 120x^4 + 216x^5 + 336x^6 + 456x^7 + 546x^8 + 580x^9 + \text{etc.}$$

etc.

5. Nunc formulam propositam sub hac binomiali

$$[1 + x(1 + x + xx)]^n$$

mus, cuiusque evolutio nobis praebet hanc seriem

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1 + x + xx) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 x^2(1 + x + xx)^2 + \text{etc.},$$

terminus generalis est

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x + xx)^\alpha.$$

vero, quia $(1 + x + xx)^\alpha$ est potestas trinomialis, erit

$$(1 + x + xx)^\alpha = 1 + \left(\frac{\alpha}{1}\right)^3 x + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 xx + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 x^3 + \text{etc.},$$

alterum terminus generalis est $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 x^\beta$; unde si proponatur potestas x^λ existente $\lambda = \alpha + \beta$, hoc membro orietur pro hac potestate $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\lambda$.

unam summam conjungatur, quae haec erit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-3}\right)^2\left(\frac{\lambda-3}{3}\right.$$

Sicque patet, quomodo omnes characteres quaternario notati per iam sive binario sive ternario notatos determinentur; quod quo clarius loco λ successive scribamus numeros 0, 1, 2, 3, 4 etc. ac reperiemu

$$\left(\frac{n}{0}\right)^4 = \left(\frac{n}{0}\right)^2\left(\frac{0}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^4 = \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{0}\right)^3 = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^4 = \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{1}\right)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n,$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^4 = \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

sive

$$\left(\frac{n}{3}\right)^4 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^4 = \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

sive

$$\left(\frac{n}{4}\right)^4 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)^4 = \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^4 = \left(\frac{n}{6}\right)^2\left(\frac{6}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{4}\right)^3 + \text{etc.},$$

$$\left(\frac{n}{7}\right)^4 = \left(\frac{n}{7}\right)^2\left(\frac{7}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{6}\right)^2\left(\frac{6}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \text{etc.},$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^4 = \left(\frac{n}{8}\right)^2\left(\frac{8}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{7}\right)^2\left(\frac{7}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{6}\right)^2\left(\frac{6}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{4}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

etc.

$$(1 + x + xx + x^3 + x^4)^n$$

17. Eius ergo valorem evolutum ita exhibemus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^5 x + \left(\frac{n}{2}\right)^5 x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^5 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^5 x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)^5 x^5 + \text{etc.},$$

st

$$\left(\frac{n}{0}\right)^5 = \left(\frac{n}{4n}\right)^5 = 1$$

in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{4n - \lambda}\right)^5;$$

vero patet hos valores evanescere tam casibus, quibus est λ numerus
or negativus, quam quibus est positivus maior quam $4n$.

8. Nunc eadem forma tanquam binomium repraesentata erit

$$[1 + x(1 + x + xx + x^3)]^n,$$

evolutio in genere praebet membrum $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x + xx + x^3)^\alpha$, ubi factor
$x + xx + x^3)^\alpha$ continet terminum $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 x^\beta$, ita ut iunctim habeatur iste ter-
$\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 x^{\alpha+\beta}$. Quare si fuerit $\alpha + \beta = \lambda$, potestatis x^λ ex hoc membro
iens erit $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4$. Iam litteris α et β tribuantur omnes valores, quos
re possunt incipiendo ab $\alpha = \lambda$; atque coëfficiens quaesitus erit

$$= \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 3}\right)^2 \left(\frac{\lambda - 3}{3}\right)^4 + \text{etc.}$$

omnes characteres numero 5 notati per characteres ordinis praecedentis
ro 4 notatos una cum characteribus numero 2 notatis definientur.

) Editio princeps: *quinquenomialis.* C. B.

19. Ex his iam satis liquet, si proponatur potestas polynomi
ex terminis numero $\theta + 1$ constantibus, scilicet

$$(1 + x + xx + x^3 + \cdots + x^\theta)^n,$$

tum termini potestatem x^λ continentis coëfficientem fore $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\theta+1}$
characteribus numero θ notatis componetur, ut sit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\theta+1} = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^\theta + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2\left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^\theta + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^\theta +$$

quae forma omnes praecedentes in se complectitur. Si enim
valore $\theta = 1$, hoc casu habetur potestas binomialis $(1 + x)^n$, chara
unitate notati oriuntur ex potestate monomiali 1^n, unde oritur $\left(\frac{n}{0}\right)$
vero omnes in nihilum abeunt. Hinc per casus procedendo ha
sequitur:

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right) = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^2 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2\left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^2 + \text{e}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2\left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^3 + \text{e}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2\left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^4 + \text{e}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^6 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^5 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2\left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^5 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^5 + \text{e}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^7 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^6 + \left(\frac{n}{\lambda - 1}\right)^2\left(\frac{\lambda - 1}{1}\right)^6 + \left(\frac{n}{\lambda - 2}\right)^2\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right)^6 + \text{e}$$

etc.

SPECIMEN TRANSFORMATIONIS SINGULARIS SERIERUM

Conventui exhibita die 3. Septembris 1778

Commentatio 710 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 58—70

Summarium ibidem p. 64—65

SUMMARIUM

Les séries dont il est question dans ce Mémoire sont comprises sous la forme générale

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{\Pi (a+1)(b+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{\Pi (a+2)(b+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.},$$

Π marque dans chaque terme le coëfficient du terme précédent; elle devient une ex-
sion finie toutes les fois que a ou b est un nombre entier négatif, et elle a cela de
rquable qu'en mettant

$$s = z(1-x)^{c-a-b}, \quad c - a = \alpha, \quad c - b = \beta,$$

a exprimé par une série parfaitement semblable à la proposée, savoir

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c} x + \frac{\Pi (\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)} x^2 + \frac{\Pi (\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

L'analyse qui a conduit l'auteur à cette transformation singulière consiste à trans-
er la série proposée en une équation différentielle du second degré, opération qui
ctue facilement et qui donne

$$x(1-x)\frac{\partial\partial s}{s} + [c - (a+b+1)x]\frac{\partial s}{s} - ab = 0.$$

et

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2n\partial x\partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)\partial x^2}{(1-x)^2}$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation différentielle du second degré, on ob

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} + [c + (a+b-2c-1)x]\frac{\partial z}{z} - (c-a)(c-b) = 0$$

ou bien, à cause de $c-a=\alpha$, $c-b=\beta$,

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} + [c-(\alpha+\beta+1)]\frac{\partial z}{z} - \alpha\beta = 0,$$

équation qui se déduit aussi de la précédente en changeant s, a et b en z, α et faisant donc le même changement dans la série proposée, il en résultera l'autre séri relation mutuelle entre les deux séries est la même qui subsiste entre les deux éq différentielles, savoir $c-a=\alpha$, $c-b=\beta$ et $s=(1-x)^n z$, où l'exposant $n=c$

L'auteur déduit aussi la seconde série d'une manière directe de la dernière é différentio-différentielle; et il termine son Mémoire par faire voir le grand avantage peut retirer de cette transformation pour la démonstration rigoureuse d'un théor calcul intégral qu'il avoit trouvé autrefois par une simple conjecture et qui est ic plettement démontré, savoir que

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)(1-aa)^{-n}\int\Delta^n\partial\varphi\cos i\varphi = \left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1-aa)^{n+1}\int\Delta^{-n-1}\partial\varphi\cos i\varphi$$

où

$$\Delta = 1 + aa - 2a\cos\varphi.$$

(Voyez sur ce théorème le Mémoire[1]): *Demonstratio Theorematis insignis per conj cruti*, in *Instit. Calc. Integr.* Tomo IV. Supplem. p. 257.)

1. Contemplatus sum hanc seriem

$$s = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

1) C'est le mémoire 674 de l'Index d'Eneström; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, p. 197. C. B.

abrumpatur eiusque summa finito modo exprimatur.

2. Quodsi nunc statuamus

$$s = z(1-x)^{c-a-b}$$

porro faciamus

$$c-a=\alpha \quad \text{et} \quad c-b=\beta,$$

a z exprimet summam huius seriei praecedenti omnino similis

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

nunc abrumpitur omnibus casibus, quibus vel α vel β est numerus in- negativus, ideoque quoties fuerit vel $a-c$ vel $b-c$ numerus integer ivus.

3. Ista transformatio eo maioris momenti est censenda, quod non nisi ongas ambages atque adeo per aequationes differentiales secundi gradus posse videatur. Operae igitur pretium erit totam analysin, cui ista trans- atio innititur, dilucide exposuisse.

4. Cum sit

$$s = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \frac{ab}{1\cdot c}\cdot\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}\cdot xx + \text{etc.}$$

e adeo in quovis termino sequente tam numerator quam denominator novos factores accipiat, per differentiationem primo ex quovis termino postremos factores tollamus, quod per has operationes praestabitur

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ab}{1\cdot c} + \frac{ab}{1\cdot c}\cdot\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}x + \text{etc.},$$

6*

quae ducta in x^c ac denuo differentiata praebet

$$\partial \cdot x^c \partial s = abx^{c-1} + \frac{ab}{1 \cdot c}(a+1)(b+1)x^c + \text{etc.},$$

ubi brevitati consulentes elementum ∂x omisimus, quippe quod spo
intelligi potest.

5. Iam simili modo per differentiationem singulis numeratoribu
novos factores adiungamus hoc modo:

1°. Series nostra ducta in x^a ac differentiata dabit

$$\partial \cdot x^a s = ax^{a-1} + \frac{ab}{1 \cdot c}(a+1)x^a + \text{etc.},$$

quae

2°. ducta in x^{b+1-a} iterumque differentiata praebet

$$\partial \cdot x^{b+1-a} \partial \cdot x^a s = abx^{b-1} + \frac{ab}{1 \cdot c}(a+1)(b+1)x^b + \text{etc.},$$

quae forma ex praecedente oritur, si ea multiplicetur per x^{b-c}.

6. Hinc igitur adipiscimur hanc aequationem

$$\partial \cdot x^{b-a+1} \partial \cdot x^a s = x^{b-c} \partial \cdot x^c \partial s,$$

quae aequatio evoluta reducitur ad hanc formam

$$x^{b+1} \partial\partial s + (a+b+1)x^b \partial s + abx^{b-1}s = x^b \partial\partial s + cx^{b-1}\partial s.$$

Haec aequatio divisa per x^{b-1} et omnibus terminis ad partem dextra
latis induet hanc formam

$$0 = x(1-x)\partial\partial s + [c-(a+b+1)x]\partial s - abs,$$

ita ut a resolutione huius aequationis differentialis secundi gradus su
seriei propositae pendeat. At vero haec aequatio ita comparata esse
ut in genere nullam integrationem admittat.

... gradum

$$s = (1-x)^n z,$$

fit

$$ls = nl(1-x) + lz,$$

differentiando erit

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{\partial z}{z} - \frac{n\partial x}{1-x},$$

quae aequatio denuo differentiata praebet

$$\frac{\partial\partial s}{s} - \frac{\partial s^2}{ss} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{\partial z^2}{zz} - \frac{n\partial x^2}{(1-x)^2}.$$

Addatur haec aequatio

$$\frac{\partial s^2}{ss} = \frac{\partial z^2}{zz} - \frac{2n\partial x\partial z}{z(1-x)} + \frac{nn\partial x^2}{(1-x)^2};$$

prodibit

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2n\partial x\partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)\partial x^2}{(1-x)^2}.$$

8. Quodsi iam aequatio proposita per s divisa ita repraesentetur

$$0 = x(1-x)\frac{\partial\partial s}{s} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial s}{s} - ab,$$

substitutione perveniemus ad aequationem differentialem secundi gradus inter z et x, quae erit[1])

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2nx\partial x\partial z}{z} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial z}{z}$$

$$+ \frac{n(n-1)x\partial x^2}{1-x} - \frac{n[c-(a+b+1)x]\partial x}{1-x} - ab = 0.$$

9. Evidens hic est numerum n ita assumi posse, ut postrema membra denominatorem $1-x$ habentia per eum dividi queant, id quod evenit casu

1) In hac formula necnon in formulis paragraphi praecedentis elementa ∂x omittenda sunt.
C. B.

$n = -a - b + c$, quo valore introducto, ut sit $s = (1-x)^{c-a-b}z$, a
inter z et x hanc accipiet formam:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c + (a+b-2c-1)x]\partial z - (c-a)(c-b)z = 0$$

10. Quodsi iam in hac aequatione ponamus $c - a = \alpha$ et $c -$
aequatio inter z et x sub hac forma apparebit:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c - (\alpha + \beta + 1)x]\partial z - \alpha\beta z = 0,$$

quae a priori prorsus non differt, nisi quod loco litterarum a et
habeamus α et β. Quare cum prior aequatio differentio-differentialis
ex serie

$$s = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}xx + \Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

vicissim ex aequatione posteriore nascetur series

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}xx + \Pi\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

existente $\alpha = c - a$ et $\beta = c - b$; atque hae duae series s et z ita a
vicem pendent, ut sit $s = (1-x)^{c-a-b}z$ sive $\frac{s}{z} = (1-x)^{c-a-b}$.

11. Verum ex posteriore aequatione differentio-differentiali methodo
eadem series pro z elici potest. Cum enim ex serie priori posito x
$s = 1$, nunc autem posuerimus $z = (1-x)^{a+b-c}s$, eodem casu $x = 0$ fiet z
Hoc notato pro z fingamus hanc seriem:

$$z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

unde fit

$$\partial z = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{etc.}$$

et

$$\partial\partial z = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + 30Fx^4 + \text{etc.},$$

$$2Bx^2 \qquad\qquad 6Cx^3 \quad \text{etc.}$$

$$e\partial z = Ae \qquad + 2Bex \qquad + 3Cex^2 \qquad + 4Dex^3 + \text{etc.}$$

$$+1)x\partial z \qquad -(\alpha+\beta+1)Ax - 2(\alpha+\beta+1)Bx^2 - 3(\alpha+\beta+1)Cx^3 \quad \text{etc.}$$

$$\alpha\beta z = -\alpha\beta \qquad -A\alpha\beta x \qquad -B\alpha\beta x^2 \qquad -C\alpha\beta x^3 \quad \text{etc.}$$

$$x(1-x)\partial\partial z + e\partial z - (\alpha+\beta+1)x\partial z - \alpha\beta z = 0.$$

Singulis igitur terminis ad nihilum reductis nanciscemur sequentes
nes:

$$\text{I.} \quad Ae - \alpha\beta = 0,$$

$$\text{II.} \quad 2B(e+1) - (\alpha+1)(\beta+1)A = 0,$$

$$\text{III.} \quad 3C(e+2) - (\alpha+2)(\beta+2)B = 0,$$

$$\text{IV.} \quad 4D(e+3) - (\alpha+3)(\beta+3)C = 0,$$

$$\text{V.} \quad 5E(e+4) - (\alpha+4)(\beta+4)D = 0$$

etc.

Hinc igitur iidem eliciuntur coëfficientes, quos iam habuimus, scilicet

$$A = \frac{\alpha\beta}{1 \cdot e},$$

$$B = \frac{A(\alpha+1)(\beta+1)}{2(e+1)},$$

$$C = \frac{B(\alpha+2)(\beta+2)}{3(e+2)},$$

$$D = \frac{C(\alpha+3)(\beta+3)}{4(e+3)}$$

etc.

n autem methodus, qua hanc egregiam transformationem sumus adepti,
sit obliqua et per ambages longas procedat, maxime optandum esset,

ut alia methodus magis directa et naturalis detegeretur, quo utique in lysin haud contemnendum incrementum inferretur. Fateor autem me hact in hac investigatione frustra laborasse.

14. Quoniam in his seriebus numerus factorum continuo crescit, qu characteres ex potestate binomiali desumtos commodius in usum ve queamus, litteris a et b, perinde ac litteris α et β, valores tribuamus tivos ponendo

$$a = -f, \quad b = -g, \quad \alpha = -\zeta \quad \text{et} \quad \beta = -\eta,$$

ita ut sit

$$\zeta = -c - f \quad \text{et} \quad \eta = -c - g,$$

et iam ambae nostrae series s et z ita a se invicem pendebunt, ut sit

$$s = (1-x)^{c+f+g} z.$$

Evolvamus nunc primo iuxta hos valores seriem priorem s, eritque

$$s = 1 + \frac{fg}{1 \cdot c} x + \Pi \frac{(f-1)(g-1)}{2(c+1)} x^2 + \Pi \frac{(f-2)(g-2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

similique modo posterior series erit

$$z = 1 + \frac{\zeta\eta}{1 \cdot c} x + \Pi \frac{(\zeta-1)(\eta-1)}{2(c+1)} x^2 + \Pi \frac{(\zeta-2)(\eta-2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

15. Hic iam commode characteres memoratos adhibere poterimus. De igitur $\left(\frac{m}{n}\right)$ coëfficientem termini v^n, qui ipsi convenit ex evolutione potes binomialis $(1+v)^m$, ita ut hoc modo habeamus

$$(1+v)^m = 1 + \left(\frac{m}{1}\right) v + \left(\frac{m}{2}\right) v^2 + \left(\frac{m}{3}\right) v^3 + \text{etc.}$$

Hinc igitur pro priore nostrarum seriorum fiet $\frac{f}{1} = \left(\frac{f}{1}\right)$; deinde $\frac{f(f-1)}{1 \cdot 2} =$ $\frac{f(f-1)(f-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \left(\frac{f}{3}\right)$ etc. sicque ista series iam concinnius ita referetur:

$$s = 1 + \frac{g}{c}\left(\frac{f}{1}\right) x + \frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1}\left(\frac{f}{2}\right) x^2 + \frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1} \cdot \frac{g-2}{c+2}\left(\frac{f}{3}\right) x^3 + \text{etc.}$$

$$\binom{g+c-1}{c-1}\frac{g}{c}=\binom{g+c-1}{c};\qquad \binom{g+c-1}{c-1}\frac{g}{c}\cdot\frac{g-1}{c+1}=\binom{g+c-1}{c+1},$$

ae expressio porro multiplicata per $\frac{g-2}{c+2}$ dabit hunc characterem: $\binom{g+c-1}{c+2}$. s notatis nanciscimur nunc hanc seriem:

$$s\binom{g+c-1}{c-1}=\binom{g+c-1}{c-1}+\binom{f}{1}\binom{g+c-1}{c}x+\binom{f}{2}\binom{g+c-1}{c+1}x^2$$
$$+\binom{f}{3}\binom{g+c-1}{c+2}x^3+\text{etc.}$$

16. Simili modo etiam alteram seriem transformare licebit; ubi autem obe notandum, hanc transformationem duplici modo institui posse, prouti tores denominatorum 1, 2, 3, 4 etc. vel cum littera ζ vel cum η coniungun-. Primo igitur ex praecedente serie, si ζ loco f et η loco g scribamus, inebimus hanc seriem:

$$z\binom{\eta+c-1}{c-1}=\binom{\eta+c-1}{c-1}+\binom{\zeta}{1}\binom{\eta+c-1}{c}x+\binom{\zeta}{2}\binom{\eta+c-1}{c+1}x^2$$
$$+\binom{\zeta}{3}\binom{\eta+c-1}{c+2}x^3+\text{etc.}$$

autem loco f et g inverso ordine scribamus η et ζ, prodit

$$z\binom{\zeta+c-1}{c-1}=\binom{\zeta+c-1}{c-1}+\binom{\eta}{1}\binom{\zeta+c-1}{c}x+\binom{\eta}{2}\binom{\zeta+c-1}{c+1}x^2$$
$$+\binom{\eta}{3}\binom{\zeta+c-1}{c+2}x^3+\text{etc.}$$

utraque autem relatio manet eadem, scilicet

$$s=(1-x)^{c+f+g}z.$$

17. Quo clarius appareat, quantopere hae duae series pro z
se invicem discrepent, loco ζ et η scribamus valores assumtos, s

$$\zeta = -c - f \quad \text{et} \quad \eta = -c - g,$$

atque ambae posteriores series pro littera z erunt

$$z\binom{-g-1}{c-1} = \binom{-g-1}{c-1} + \binom{-c-f}{1}\binom{-g-1}{c}x + \binom{-c-f}{2}\binom{-g-1}{c+1}$$

$$z\binom{-f-1}{c-1} = \binom{-f-1}{c-1} + \binom{-c-g}{1}\binom{-f-1}{c}x + \binom{-c-g}{2}\binom{-f-1}{c+1}$$

18. Quo iam has series ad formam commodiorem revocemus

$$g + c - 1 = h \quad \text{et} \quad c - 1 = e,$$

ita ut sit

$$c = e + 1 \quad \text{et} \quad g = h - e;$$

hinc enim series nostra principalis erit

$$s\binom{h}{e} = \binom{h}{e} + \binom{f}{1}\binom{h}{e+1}x + \binom{f}{2}\binom{h}{e+2}x^2 + \binom{f}{3}\binom{h}{e+3}x^3$$

Binae autem sequentes series ex littera z formatae erunt

prior

$$z\binom{e-h-1}{e} = \binom{e-h-1}{e} + \binom{-e-f-1}{1}\binom{e-h-1}{e+1}x$$
$$+ \binom{-e-f-1}{2}\binom{e-h-1}{e+2}x^2 + \text{etc.},$$

posterior

$$z\binom{-f-1}{e} = \binom{-f-1}{e} + \binom{-1-h}{1}\binom{-f-1}{e+1}x$$
$$+ \binom{-1-h}{2}\binom{-f-1}{e+2}x^2 + \text{etc.};$$

ambae autem quantitates s et z ita a se invicem pendent, ut sit

$$s = (1-x)^{f+h+1} z.$$

$$\int \frac{i\varphi \cos. i\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^{n+1}}$$

petito, cuius integrale a termino $\varphi = 0$ usque ad terminum $\varphi = 180^0$ pri
quidem per solam coniecturam conclusi[1]) esse

$$= \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{n-i}{0}\binom{n+i}{i} + \binom{n-i}{1}\binom{n+i}{i+1}aa + \binom{n-i}{2}\binom{n+i}{i+2}a^4 + \text{etc.};$$

quae series, si cum nostra principali conferatur, ut sit

$$V = s\binom{h}{e},$$

praebebit

$$h = n+i \quad \text{et} \quad e = i,$$

tum vero

$$f = n-i \quad \text{et} \quad x = aa;$$

binae ergo alterae series hinc formatae erunt

prior

$$z\binom{-n-1}{i} = \binom{-n-1}{i} + \binom{-n-1}{1}\binom{-n-1}{i+1}a^2$$
$$+ \binom{-n-1}{2}\binom{-n-1}{i+2}a^4 + \text{etc.},$$

altera

$$z\binom{i-n-1}{i} = \binom{i-n-1}{i} + \binom{-n-i-1}{1}\binom{i-n-1}{i+1}a^2$$
$$+ \binom{-n-i-1}{2}\binom{i-n-1}{i+2}a^4 + \text{etc.},$$

1) Confer Commentationes indicis ENESTROEMIANI 672, 673, imprimis 674. *LEONHAR EULERI Opera omnia*, vol. I16, p. XLV, 141, 168, 197. C. B.

quae series ex ipsa serie V oritur loco n scribendo $-n-1$.
relatio inter s et z erit

$$s=(1-aa)^{2n+1}z:$$

tum vero est

$$V=s\left(\frac{n+i}{i}\right).$$

20. Cum igitur sit

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.i\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^{n+1}}=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}V=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\left(\frac{n+}{i}\right.$$

in hac forma loco n scribamus $-n-1$ sitque

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.i\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^{-n}}\begin{bmatrix}\text{a }\varphi=0\\ \text{ad }\varphi=180^0\end{bmatrix}=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{-2n-1}}U,$$

erit

$$U=\left(\frac{-n-1-i}{0}\right)\left(\frac{-n-1+i}{i}\right)+\left(\frac{-n-1-i}{1}\right)\left(\frac{-n-1+i}{i+1}\right)aa$$

ideoque

$$U=z\left(\frac{i-n-1}{i}\right)=\left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1-aa)^{-2n-1}s.$$

21. Ponamus iam

$$1+aa-2a\cos.\varphi=\triangle$$

et contemplemur hos duos valores integrales, quos modo sumus

$$\text{I. }\int\frac{\partial\varphi\cos.i\varphi}{\Delta^{n+1}}=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\left(\frac{n+i}{i}\right)s,$$

$$\text{II. }\int\Delta^n\partial\varphi\cos.i\varphi=\frac{\pi a^i}{(1-aa)^{-2n-1}}\left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1-aa)^{-2n-1}s=\pi a^i$$

consequenter inter has duas formulas integrales a termino $\varphi=0$
$\varphi=180^0$ extensas consequimur hanc relationem maxime memora

$$\int\frac{\partial\varphi\cos.i\varphi}{\Delta^{n+1}}:\int\Delta^n\partial\varphi\cos.i\varphi=\left(\frac{n+i}{i}\right):\left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1-aa)^{2}$$

sive erit

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)(1-aa)^{-n}\int\Delta^n\partial\varphi\cos.i\varphi=\left(\frac{-n-1+i}{i}\right)(1-aa)^{n+1}\int\Delta^{-n-}$$

22. Hoc postremum theorema iam ante aliquod tempus[1] per sol
ductionem quoque erueram, atque adeo de eius demonstratione prope
desperaveram, quae nunc ex transformatione seriorum allata quasi sp
obtulit; unde praestantissimus usus huius transformationis, quae meri
fundissimae indaginis est censenda, eo clarius perspicitur.

23. Cum autem nuper[1]) idem hoc theorema proposuissem, ratio
inter binas formulas integrales aliquatenus ab hic inventa discrepare
interim tamen perfecte consentire deprehenduntur, si modo sequens pu
in subsidium vocetur, qua generatim est

$$\binom{n}{i} : \binom{-n-1}{i} = \binom{-n-1+i}{i} : \binom{n+i}{i},$$

cuius ratio inde est manifesta, quod in genere semper est

$$\binom{-a}{i} = \pm \binom{a+i-1}{i}$$

ideoque etiam

$$\binom{b}{i} = \pm \binom{-b-1+i}{i},$$

ubi signa superiora valent, si i fuerit numerus par, inferiora vero si
Hinc ergo erit

$$\binom{n+i}{i} = \pm \binom{-n-1}{i} \quad \text{et} \quad \binom{-n-1+i}{i} = \pm \binom{n}{i}.$$

24. Hinc igitur nostrum theorema adhuc concinnius enunciari
Si ponamus brevitatis gratia

$$\frac{1+aa-2a\cos.\varphi}{1-aa} = \Theta,$$

ita ut sit

$$\Delta = (1-aa)\Theta,$$

1) Vide notam ad p. 42 adiectam. C. B.

tum ista prodibit proportio:

$$\int \Theta^n \partial\varphi \cos. i\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Theta^{n+1}} = \int \frac{\triangle^n \partial\varphi \cos. i\varphi}{(1-aa)^n} : \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi (1}{\triangle^{n+1}}$$

$$= \binom{n-1+i}{i} : \binom{n+i}{i} = \binom{n}{i} : \binom{-n-1}{i}$$

sicque erit

$$\binom{n}{i} \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Theta^{n+1}} = \binom{-n-1}{i} \int \Theta^n \partial\varphi \cos. i\varphi.$$

25. Ceterum quo transformationes hic expositae facilius ac accommodari queant, eas sequenti theoremate complectamur.

THEOREMA

Si cognita fuerit summa huius seriei:

$$\binom{h}{e} + \binom{f}{1}\binom{h}{e+1}x + \binom{f}{2}\binom{h}{e+2}x^2 + \binom{f}{3}\binom{h}{e+3}x^3 + \text{etc.}$$

quae ponatur $= S$, tum etiam summae binarum sequentium se poterunt, quarum prior est ista:

$$\binom{e-h-1}{e} + \binom{-e-f-1}{1}\binom{e-h-1}{e+1}x + \binom{-e-f-1}{2}\binom{e-h-1}{e+2}$$

cuius summa erit

$$\binom{e-h-1}{e} \frac{S}{\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}},$$

ubi notetur esse

$$\binom{e-h-1}{e} = \pm \binom{h}{e},$$

ubi signum superius valet si i numerus par, inferius si impar; unde

$$\frac{\pm S}{(1-x)^{f+h+1}}.$$

s summa erit

$$\binom{-f-1}{e}\frac{S}{\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}}.$$

etiam hoc modo exprimi potest:

$$\pm\binom{f+e}{e}\frac{S}{\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}}$$

26. Si summae harum trium serierum statuantur ut sequitur

$$S=\binom{h}{e}+\binom{f}{1}\binom{h}{e+1}x+\binom{f}{2}\binom{h}{e+2}x^2+\binom{f}{3}\binom{h}{e+3}x^3+\text{etc.},$$

$$\mathfrak{S}=\binom{e-h-1}{e}+\binom{e-f-1}{1}\binom{e-h-1}{e+1}x+\binom{e-f-1}{2}\binom{e-h-1}{e+2}x^2+\text{etc.},$$

$$\mathfrak{T}=\binom{-f-1}{e}+\binom{-h-1}{1}\binom{-f-1}{e+1}x+\binom{-h-1}{2}\binom{-f-1}{e+2}x^2+\text{etc.},$$

ita inter se referuntur, ut sit

$$\binom{e-h-1}{e}\mathfrak{S}=\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}\mathfrak{T},$$

$$\binom{-f-1}{e}\mathfrak{S}=\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}S,$$

$$\binom{-f-1}{e}\mathfrak{T}=\binom{e-h-1}{e}S.$$

DISQUISITIONES ANALYTICAE SUPER EVOLUTIONE POTESTATIS TRINOMIA

$$(1 + x + xx)^n$$

Conventui exhibita die 17. Augusti 1778

Commentatio 722 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 14 (1797/98), 1805, p. 75–1

Summarium ibidem p. 66–67

SUMMARIUM

Feu Mr. EULER a consacré ce mémoire à la recherche de plusieurs propriét quables des coëfficiens de ce trinome développé. Il considère le plus grand coëf le moyen, qu'il indique, avec ceux qui le suivent, par les lettres

$$p,\ q,\ r \text{ etc. pour la puissance } n^{me},$$
$$p',\ q',\ r' \text{ etc. pour la puissance } (n+1)^{me},$$
$$p'',\ q'',\ r'' \text{ etc. pour la puissance } (n+2)^{me}$$

et ainsi de suite, et il détermine premierement les coëfficiens p, q, r etc. par l'e au moyen du symbolisme dont il s'est servi dans ses derniers ouvrages pou les coëfficiens des puissances du binome; après quoi, il s'attache à déterminer l qui subsiste entre les coëfficiens du même ordre dans les puissances consécutives d savoir entre les valeurs p, p', p'' etc., et enfin la relation entre les coëfficiens quelco respondans, dans les mêmes trois puissances consécutives, savoir la n^{me}, $(n+1)^{me}$ et De là, il passe à la détermination des coëfficiens q, r, s etc. exprimés par le sou

1) Confer hac cum Commentatione praeter Commentationes 326 et 551 praecede Commentationem 709 huiusce voluminis. C. B.

exposans $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ etc., et la sommation des séries dont les termes se trouvent dans les diagonales consécutives parallèles à celle que forment les dits termes moyens.

1. Cum olim in *Novorum Commentariorum tomo XI* sub titulo *Observationum analyticarum*[1]) istam potestatem trinomialem multo studio essem perscrutatus, plura egregia symptomata inveni, quae maiore attentione Geometrarum non indigna videbantur. Hanc ob rem nuper[2]) hoc idem argumentum denuo tractare suscepi atque nonnullis artificiis analyticis usus multo plura insignia phaenomena se mihi obtulerunt, quorum expositionem Geometris non ingratam fore confido.

2. Incipio igitur ab ipsa evolutione huius formulae

$$(1 + x + xx)^n,$$

quae pro singulis valoribus exponentis n sequentes praebet expressiones in tabula subiuncta repraesentatas:

$$(1 + x + xx)^n$$

$$\begin{array}{lllllllllllll}
n = 0 & 1 \\
n = 1 & 1 & + \;\; x & + \;\; xx \\
n = 2 & 1 & + \; 2x & + \; 3xx & + \; 2x^3 & + \;\; x^4 \\
n = 3 & 1 & + \; 3x & + \; 6xx & + \; 7x^3 & + \; 6x^4 & + \; 3x^5 & + \;\; x^6 \\
n = 4 & 1 & + \; 4x & + \; 10xx & + \; 16x^3 & + \; 19x^4 & + \; 16x^5 & + \; 10x^6 & + \; 4x^7 & + \;\; x^8 \\
n = 5 & 1 & + \; 5x & + \; 15xx & + \; 30x^3 & + \; 45x^4 & + \; 51x^5 & + \; 45x^6 & + \; 30x^7 & + \; 15x^8 & + \; 5x^9 & + \; x^{10}
\end{array}$$

etc.

1) Commentatio supra laudata, indicis Eneströmiani 326, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 15, p. 50—69. C. B.

2) In Commentatione 709 supra laudata, vide p. 28 praesentis voluminis. C. B.

Hic scilicet ex qualibet potestate facillime sequens deducit... quolibet valore exponentis n quilibet coëfficiens cum binis p... nuam summam colligatur, obtinetur coëfficiens pro potestate... nentis $n+1$ subscribenda.

3. Hanc tabulam aspicienti statim patet in qualibet c... cientes terminorum usque ad medium, qui dignitatem x^n refe... autem iterum eodem ordine decrescere usque ad ultimum te... x^{2n}. Deinde etiam haud difficulter perspicitur pro potestate... genere terminos initiales ita expressum iri:

$$1+nx+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n(n-1)(nn+\ldots}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots}$$
$$+\frac{n(n-1)(n+1)(n-2)(n+12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\text{etc.}$$

Hos autem terminos ulterius prosequi non attinet, quia in e... bus nullus ordo deprehenditur.

4. Hic autem imprimis ad coëfficientem maximum seu... quem pro potestate $(1+x+xx)^n$ in genere perpetuo statu... vero terminos hunc sequentes ita repraesentabo: qx^{n+1}, rx^{n+2},... unde termini medium praecedentes erunt ordine retrogrado qx... tx^{n-4} etc. Deinde vero pro potestate sequenti $(1+x+xx)^{n+\ldots}$ apice suo notaturus, scilicet p', q', r', s' etc., quas porro pro... sequente $(1+x+xx)^{n+2}$ apici duplici designabo; pro sequentib... quadruplici et ita porro.

5. His praemissis, in hac dissertatione ex seriebus su... potissimum terminos medios maximis coëfficientibus affectos... turus, qui sunt 1, x, $3x^2$, $7x^3$, $19x^4$, $51x^5$ etc., qui iunctim s... seriem, cuius summam littera P indicabo, ita ut

$$P=1+x+3x^2+7x^3+19x^4+51x^5+\cdots+px^n+p'x^{n+1}+\ldots$$

6. Praeterea vero, quemadmodum isti termini ex tabula... dum diagonalem sunt desumti, simili modo tales series form...

$= x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 16x^5 + 45x^6 + \cdots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + q''x^{n+3} + \text{etc.},$
$= x^4 + 3x^5 + 10x^6 + 30x^7 + \cdots\cdots\cdots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + r''x^{n+4} + \text{etc.},$
$= x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + s''x^{n+5} + \text{etc.},$
$= x^8 + 5x^9 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + tx^{n+4} + t'x^{n+5} + t''x^{n+6} + \text{etc.}$

etc.

onstitutis propositum mihi est primo in valores litterarum minuscularum r, s etc. earumque derivatarum p', q', r', s' etc., p'', q'', r'', s'' etc. inqui- quo facto etiam valores litterarum mainscularum P, Q, R, S etc. indagabo.

INVESTIGATIO LITTERARUM p, q, r, s etc.

. Cum p sit coëfficiens potestatis x^n ex evolutione formulae $(1 + x + xx)^n$ lae, istam formulam hoc modo repraesentemus:

$$(x(1 + x) + 1)^n.$$

uius evolutione utamur signandi modo iam aliquoties a me usitato, quo ientes similis potestatis binomialis per hos characteres designare soleo $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ etc., ita ut sit

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

$$\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda}.$$

Circa quos characteres hic annotasse iuvabit in genere semper esse

$$\binom{n}{\lambda} = \binom{n}{n-\lambda},$$

quandoquidem hi coëfficientes retro eundem ordinem servant; et qui cientes extremi sunt unitas, erit

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Deinde, quia ex lege progressionis tam omnes termini primum ante quam termini ultimum sequentes evanescunt, erit ut sequitur:

$$\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0,$$

$$\binom{n}{-2} = \binom{n}{n+2} = 0,$$

$$\binom{n}{-3} = \binom{n}{n+3} = 0$$

etc.

8. His praemissis formula nostra $(x(1+x)+1)^n$ more solito binomium evoluta dabit hanc seriem:

$$x^n(1+x)^n + \binom{n}{1} x^{n-1}(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}(1+x)^{n-2} + \binom{n}{3} x^{n-3}(1+x)^{n}$$

ubi notetur esse in genere

$$(1+x)^\lambda = 1 + \binom{\lambda}{1} x + \binom{\lambda}{2} x^2 + \binom{\lambda}{3} x^3 + \text{etc.}$$

Ex singulis igitur membris illius formae expositae depromi debent potestatem x^n continentes, quippe qui coniunctim sumti component medium px^n.

9. Primum autem membrum, $x^n(1+x)^n$, tantum terminum huir praebet x^n. Ex membro autem secundo hanc formam habebit termin

dus, qui est $\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}x^n$. Ex tertio membro potestas x^n oritur ex termino tertio, qui est $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}x^n$. Simili modo ex membro quarto deducitur $\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}x^n$. Ex quinto oritur $\binom{n}{4}\binom{n-4}{4}x^n$ et ita porro. Hinc igitur verus valor litterae p ita colligitur:

$$p = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{4} + \text{etc.}$$

10. Simili modo ex eadem evolutione colligere licet coëfficientes potestatis x^{n+1}, qui iunctim sumti dabunt valorem litterae q. Talis autem potestas ex primo membro orta erit $\binom{n}{1}x^{n+1}$. Ex secundo membro oritur $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}x^{n+1}$, ex tertio membro $\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}x^{n+1}$, ex quarto $\binom{n}{3}\binom{n-3}{4}x^{n+1}$ et ita porro, quocirca verus valor litterae q hoc modo exprimetur:

$$q = \binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{3} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{4} + \text{etc.},$$

ubi ob analogiam primus terminus, $\binom{n}{1}$, ita repraesentatus est intelligendus $\binom{n}{0}\binom{n}{1}$. Si enim, cum quilibet terminus duobus constet factoribus, priores factores constituunt hanc seriem: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$ etc., posteriores vero istam: $\binom{n}{1}$, $\binom{n-1}{2}$, $\binom{n-2}{3}$, $\binom{n-3}{4}$ etc.

11. Pari modo ex potestatibus x^{n+2}, quae ex singulis membris deducuntur, formabitur terminus rx^{n+2}; at vero primum membrum pro hac potestate praebet $1\cdot\binom{n}{2}x^{n+2}$ sive analogiae gratia $\binom{n}{0}\binom{n}{2}x^{n+2}$. Ex membro secundo oritur eadem potestas $\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}x^{n+2}$, ex tertio membro $\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}x^{n+2}$, ex quarto $\binom{n}{3}\binom{n-3}{5}x^{n+2}$ et ita porro; ex quibus ergo collectis nanciscimur valorem litterae r hoc modo expressum:

$$r = \binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{3} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{4} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{5} + \text{etc.}$$

$$s=\left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{3}\right)+\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{5}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-}{6}\right.$$

$$t=\left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{4}\right)+\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{5}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{6}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-}{7}\right.$$

$$u=\left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{5}\right)+\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{7}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-}{8}\right.$$

etc.

atque in genere, si potestati $x^{n+\lambda}$ tribuamus litteram z, erit

$$z=\left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{\lambda}\right)+\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-3}{\lambda+3}\right.$$

13. Manifestum hic est omnes terminos harum serierum
forma generali $\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right)$, quam observo semper huic esse aequ
ita ut litterae α et β permutationem patiantur. Cum enim fact

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\alpha+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\alpha}$$

et

$$\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right)=\frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)(n-\alpha-2)\cdots(n-\alpha-\beta+}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\beta}$$

facta multiplicatione erit

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\alpha\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\beta}$$

ubi permutabilitas litterarum α et β in oculos incurrit.

14. Quodsi iam series ante inventae hoc modo immutentur,
pro p inventa nullam mutationem patitur, reliquae vero s
referentur:

$$= \binom{n}{3}\binom{n-3}{0} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{1} + \binom{n}{5}\binom{n-5}{2} + \binom{n}{6}\binom{n-6}{3} + \text{etc.},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$= \binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{0} + \binom{n}{\lambda+1}\binom{n-\lambda-1}{1} + \binom{n}{\lambda+2}\binom{n-\lambda-2}{2} + \text{etc.}$$

. Praeterea vero maxime memorabilis est haec conversio, qua est

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha}\binom{n}{\alpha+\beta}.$$

nim sit

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\cdots(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha}$$

$$\binom{n}{\alpha+\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha\times(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\beta)}$$

$$\binom{n}{\alpha+\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\beta\times(\beta+1)\cdots(\beta+2)(\beta+\alpha)},$$

tum erit

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\binom{n}{\alpha+\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\beta\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha},$$

m eandem formam resolvitur formula $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$.

. Per hanc igitur transformationem superiores series sequenti modo i poterunt:

$$q = \binom{1}{0}\binom{n}{1} + \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} + \binom{7}{3}\Big(\ldots$$

$$r = \binom{2}{0}\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\Big(\ldots$$

$$s = \binom{3}{0}\binom{n}{3} + \binom{5}{1}\binom{n}{5} + \binom{7}{2}\binom{n}{7} + \binom{9}{3}\Big(\ldots$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$z = \binom{\lambda}{0}\binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4} + \binom{\lambda+6}{3}\Big(_{\lambda}\ldots$$

17. Notari adhuc meretur alia transformatio, quae ad calc
cum imprimis est accommodata. Cum enim ex prima forma si

$$z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{\lambda+2} + \text{etc.},$$

quilibet terminus huius seriei est $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha}$, qui dicatur $= \Pi$,
evolutione

$$\Pi = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha+1)\cdots(n-2\alpha-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha \times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+\alpha)}$$

Quodsi iam hic loco α scribamus $\alpha+1$, ut oriatur terminus
ergo erit

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1) \times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+\alpha+1)},$$

hic per illum divisus praebet quotum

$$\frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}.$$

ergo erit terminus sequens

$$\Pi\cdot\frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}.$$

18. Quodsi ergo in hac serie more NEWTONIANO littera Π denotet quem-
terminum praecedentem, sequens semper erit

$$\Pi\cdot\frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)};$$

cum primus terminus sit $\binom{n}{\lambda}$, ubi est $\alpha=0$, si hic designetur per Π, erminus secundus

$$=\Pi\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)};$$

i denuo vocetur Π, erit terminus tertius

$$=\Pi\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)};$$

i denuo vocetur Π, erit terminus quartus

$$=\Pi\frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)}$$

porro. Hoc modo nostra series pro z hanc induet formam:

$$z=\binom{n}{\lambda}+\Pi\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1(\lambda+1)}+\Pi\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)}$$
$$+\Pi\frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)}+\text{etc.},$$

cilicet perpetuo Π designat terminum praecedentem.

19. Hinc igitur, si loco λ successive scribamus valores 0, 1, 2, 3 etc., pro is litteris p, q, r, s etc. sequentes nanciscemur series:

$$p = 1 + \Pi\frac{n(n-1)}{1\cdot 1} + \Pi\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 2} + \Pi\frac{(n-4)(n-5)}{3\cdot 3} +$$

$$q = \left(\frac{n}{1}\right) + \Pi\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} + \Pi\frac{(n-3)(n-4)}{2\cdot 3} + \Pi\frac{(n-5)(n-6)}{3\cdot 4} +$$

$$r = \left(\frac{n}{2}\right) + \Pi\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 3} + \Pi\frac{(n-4)(n-5)}{2\cdot 4} + \Pi\frac{(n-6)(n-7)}{3\cdot 5} +$$

$$s = \left(\frac{n}{3}\right) + \Pi\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 4} + \Pi\frac{(n-5)(n-6)}{2\cdot 5} + \Pi\frac{(n-7)(n-8)}{3\cdot 6} +$$

etc.

20. Istae formae ad calculum numericum imprimis sunt accom[...] quod pro sola littera p ostendisse sufficiet. Quaeramus scilicet exem[...] valorem ipsius p pro casu $n = 6$, ac singulae eius partes sequenti m[...] perientur:

$$\text{I.} = 1 \qquad = \quad 1$$

$$\text{II.} = 1\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 1} = \quad 30$$

$$\text{III.} = 30\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 2} = \quad 90$$

$$\text{IV.} = 90\cdot\frac{2\cdot 1}{3\cdot 3} = \quad 20$$

ergo summa $= p = 141$.

21. Simili modo quaeramus valorem ipsius p pro casu $n =$[...] singulae partes sequenti modo colligentur:

$$\text{III.}\quad 132 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 2} = 2970$$

$$\text{IV.}\quad 2970 \cdot \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 3} = 18480$$

$$\text{V.}\quad 18480 \cdot \frac{6 \cdot 5}{4 \cdot 4} = 34650$$

$$\text{VI.}\quad 34650 \cdot \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 5} = 16632$$

$$\text{VII.}\quad 16632 \cdot \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 6} = 924$$

ergo summa $p = 73789$.

22. Mox autem trademus modum multo expeditiorem singulos terminos um serierum ex binis praecedentibus eliciendi, unde facili calculo omnes res pro litteris p, q, r etc. pro singulis exponentibus n exhiberi poterunt. ue omnes istos valores, quousque libuerit, continuare licebit. Hanc autem tionem primo seorsim pro numeris sub littera p contentis instituimus.

ESTIGATIO RELATIONIS INTER TERNOS VALORES CONSECUTIVOS p, p', p''.

23. Cum sit

$$p = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \text{etc.},$$

s seriei consideremus terminum quemcunque $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\alpha}$, quem vocemus H, ita ut facta evolutione sit

$$H = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha \times 1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha};$$

terminum autem, qui hunc sequitur, designemus per Φ, ut sit

$$\Phi = \left(\frac{n}{\alpha + 1}\right)\left(\frac{n - \alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$$

ideoque facta evolutione

$$\Phi = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)};$$

hincque ergo habebitur

$$\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha+1)} \quad \text{ideoque} \quad \Pi = \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1}$$

24. Iam pro valoribus sequentibus p' et p'' designemus valores respondentes per Φ' et Φ''; qui quoniam oriuntur ex valore Φ, scribatur $n+1$ et $n+2$, erit facta evolutione

$$\Phi' = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)},$$

unde patet fore

$$\Phi' : \Phi = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}$$

hincque

$$\Phi' = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}\,\Phi.$$

Simili modo, si hic quoque loco n scribamus $n+1$, habebimus

$$\Phi'' = \frac{n+2}{n-2\alpha}\,\Phi' \quad \text{sive} \quad \Phi'' = \frac{(n+1)(n+2)\Phi}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)}.$$

25. Hinc iam formemus hanc expressionem:

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\,\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\,\Phi'',$$

cuius ergo valor per ipsam litteram Φ ita exprimetur:

$$\Phi\left(A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)}\right),$$

r loco Π valore ante dato per Φ expresso, nanciscemur sequentem ationem per Φ divisam:

$$A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)},$$

a fractionibus liberata evadit

$$A(n-2\alpha-1)(n-2\alpha) + B(n-2\alpha) + C = (\alpha+1)(\alpha+1).$$

26. Cum in hac aequatione littera α ad secundam dimensionem ascendat, us litterae A, B, C praecise sufficient, ut ex hac aequatione determinari nt. Primo igitur comparemus utrinque terminos quadratum $\alpha\alpha$ involventes, orietur ista aequatio:

$$4A\alpha\alpha = \alpha\alpha \quad \text{ideoque} \quad A = \frac{1}{4}.$$

em modo comparemus terminos ipsam litteram α involventes, unde permus ad hanc aequationem:

$$2\alpha(1-2n)A - 2\alpha B = 2\alpha,$$

fit

$$B = -\frac{2n-1}{4} - 1 = -\frac{2n+3}{4}.$$

que termini ab α immunes dant hanc aequationem:

$$(nn-n)A + nB + C = 1,$$

reperitur

$$C = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

27. His igitur valoribus inventis pro singulis terminis semper erit

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'' = \Pi.$$

Quodsi ergo hinc computemus hanc formulam:

$$Ap + \frac{B}{n+1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p'',$$

ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens seriei p, qui est
ex secundis autem terminis pro Φ assumtis orietur terminus primus,
est 1; ex terminis autem tertiis conficitur terminus secundus, qui
$\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right)$; ex terminis quartis pro Φ assumtis conficitur tertius, qui
$\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$; et ita porro; sicque omnes tres series hoc modo collectae
ducent hanc seriem:

$$0 + 1 + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) + \text{etc.},$$

quae est ipsa series pro p data. Hinc habebimus inter ternas litteras p
p'' hanc aequationem:

$$Ap + \frac{B}{n+1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p'' = p.$$

28. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C valores modo inve
et nostra aequatio inter has ternas litteras erit

$$\frac{1}{4}p - \frac{2n+3}{4(n+1)}p' + \frac{n+2}{4(n+1)}p'' = p,$$

quae reducitur ad hanc:

$$\frac{n+2}{n+1}p'' - \frac{2n+3}{n+1}p' = 3p,$$

unde fit

$$p'' = p' + \frac{n+1}{n+2}(p' + 3p).$$

29. Hinc igitur facile pro singulis valoribus exponentis n omnes nu
littera p designati definiri poterunt, dum quilibet ex duobus praecedent
componitur. Ita sumto $n = 0$ erit $p = 1$ et $p' = 1$ ideoque tertius

$$p'' = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3 \cdot 1) = 3.$$

tae $n = 2$ ob $p = 3$ et $p' = 7$ erit terminus quintus

$$p'' = 7 + \frac{3}{4}(7 + 3 \cdot 3) = 19.$$

matur $n = 3$, ob $p = 7$ et $p' = 19$ erit terminus sextus

$$p'' = 19 + \frac{4}{5}(19 + 3 \cdot 7) = 51.$$

30. Si hoc modo ulterius progrediamur, poterimus hanc progressionem nuare quousque libuerit, ope formae

$$p' + \frac{n+1}{n+2}(p' + 3p) = p'',$$

e nobis suppeditat sequentes determinationes:

$$51 + \frac{5}{6}(\ \ 51 + 3 \cdot \ \ 19) = \ \ 141,$$

$$141 + \frac{6}{7}(\ 141 + 3 \cdot \ \ 51) = \ \ 393,$$

$$393 + \frac{7}{8}(\ 393 + 3 \cdot \ 141) = \ 1107,$$

$$1107 + \frac{8}{9}(\ 1107 + 3 \cdot \ 393) = \ 3139,$$

$$3139 + \frac{9}{10}(\ 3139 + 3 \cdot 1107) = \ 8953,$$

$$8953 + \frac{10}{11}(\ 8953 + 3 \cdot 3139) = 25653,$$

$$25653 + \frac{11}{12}(25653 + 3 \cdot 8953) = 73789$$

etc.

respondere assumsimus litteram λ.

INVESTIGATIO RELATIONIS INTER TERNOS TERMINOS (

$z,\ z',\ z''$.

32. Cum sit

$$z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{\lambda+2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{\lambda+3} + $$

huius seriei consideremus terminum quemcunque

$$\Pi = \binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha},$$

cuius valor evolutus est

$$\Pi = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha \times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+\alpha)}.$$

Terminum iam hunc sequentem

$$\binom{n}{\alpha+1}\binom{n-\alpha-1}{\lambda+\alpha+1} = \Phi$$

evolvamus, unde fit

$$\Phi = \frac{n(n-1)(n-2\cdots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+\alpha+1)}.$$

Hinc ergo colligimus

$$\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$$

ideoque

$$\Pi = \frac{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}.$$

33. Iam pro valoribus sequentibus z' et z'' designemus v
respondentes per Φ' et Φ''; qui quoniam oriuntur ex valore
scribatur $(n+1)$ et $(n+2)$, erit facta evolutione

$$\ldots \qquad dp \qquad n-2\alpha-\lambda-1$$

...ue

$$dp' = \frac{(n+1)dp}{n-2\alpha-\lambda-1}.$$

...que modo erit

$$dp'' = \frac{n+2}{n-2\alpha-\lambda}\,dp' = \frac{(n+2)(n+1)dp}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}.$$

...4. Hinc prorsus ut supra formemus hanc expressionem:

$$A\,dp + \frac{B}{n+1}\,dp' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\,dp'',$$

...valor per dp ita exprimitur:

$$dp\left(A + \frac{B}{n-2\alpha-\lambda-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}\right).$$

...erum litteras A, B, C ita definiri oportet, ut formula aequalis evadat ...ermino praecedenti H. Substituto igitur loco H valore ante per dp ex... nanciscemur sequentem aequationem a fractionibus iam liberatam:

$$\ldots 2\alpha-\lambda-1)(n-2\alpha-\lambda) + B(n-2\alpha-\lambda) + C = (\alpha+1)(\alpha+\lambda+1).$$

...5. Facta igitur evolutione et comparatis primo utrinque terminis $\alpha\alpha$ ...entibus prodit haec aequatio pro determinatione litterae A:

$$4\alpha\alpha A = \alpha\alpha \quad \text{ideoque} \quad A = \frac{1}{4}.$$

...n modo si comparentur termini simplicem litteram α involventes, per...ur ad sequentem aequationem:

$$(4\alpha\lambda - 4n\alpha + 2\alpha)A - 2\alpha B = (\lambda+2)\alpha,$$

Denique coaequatis terminis ab α liberis prodit aequatio

$$\frac{nn-2n\lambda-n+\lambda\lambda+\lambda}{4}-\frac{(n-\lambda)(2n+3)}{4}+C=\lambda+1,$$

unde fit

$$C=\frac{(n+2)^2}{4}-\frac{\lambda\lambda}{4}.$$

36. His igitur valoribus inventis pro singulis terminis somp

$$A\Phi+\frac{B}{n+1}\Phi'+\frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi''=H.$$

Quodsi igitur hinc computemus istam formulam:

$$Az+\frac{B}{n+1}z'+\frac{C}{(n+2)(n+1)}z'',$$

ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens seriei z, secundis autem terminis pro Φ assumtis orietur terminus pri tertiis terminis conficitur terminus secundus $\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right)$; ex qua pro Φ assumtis conficitur tertius, qui est $\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right)$, et ita porro lectis oritur ipsa series pro z data

$$z=\left(\frac{n}{\lambda}\right)+\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right)+\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-3}{\lambda+3}\right)+\text{e}$$

Relatio igitur inter z, z', z'' erit

$$Az+\frac{B}{n+1}z'+\frac{C}{(n+2)(n+1)}z''=z.$$

37. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C valores m et aequatio inter has ternas litteras erit

$$\frac{1}{4}z - \frac{2n+3}{4(n+1)}z' + \frac{(n+2)^2-\lambda\lambda}{4(n+2)(n+1)}z'' = z,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{(n+2)^2-\lambda\lambda}{(n+2)(n+1)}z'' = \frac{2n+3}{n+1}z' + 3z,$$

unde colligitur

$$z'' = \frac{n+2}{(n+2)^2-\lambda\lambda}\big((2n+3)z' + 3(n+1)z\big).$$

38. Tribuamus nunc litterae λ successive valores 0, 1, 2, 3, 4 etc. reperiemus sequentes relationes pro singulis litteris:

$$\frac{(n+2)^2-0^2}{(n+2)(n+1)}p'' = \frac{2n+3}{n+1}p' + 3p,$$

$$\frac{(n+2)^2-1^2}{(n+2)(n+1)}q'' = \frac{2n+3}{n+1}q' + 3q,$$

$$\frac{(n+2)^2-2^2}{(n+2)(n+1)}r'' = \frac{2n+3}{n+1}r' + 3r,$$

$$\frac{(n+2)^2-3^2}{(n+2)(n+1)}s'' = \frac{2n+3}{n+1}s' + 3s \quad .$$

etc.

39. Cum igitur pro littera q habeamus hanc aequationem:

$$q'' = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}\big((2n+3)q' + 3(n+1)q\big),$$

casu $n=0$ erit $q=0$ et $q'=1$, unde fit

$$q'' = \frac{2}{3}(3\cdot 1 + 3\cdot 0) = 2.$$

Nunc pro $n=1$ ob $q=1$ et $q'=2$ erit

$$q'' = \frac{3}{2\cdot 4}(5\cdot 2 + 6\cdot 1) = 6.$$

Iam sumto $n=3$ ob $q=6$ et $q'=16$ erit

$$q''=\frac{5}{4\cdot 6}(9\cdot 16+12\cdot 6)=45.$$

At casu $n=4$ ob $q=16$ et $q'=45$ erit

$$q''=\frac{6}{5\cdot 7}(11\cdot 45+15\cdot 16)=126.$$

40. Hic autem calculus multo laboriosior et taediosior est quam cedens pro valoribus litterae p expositus. Verum alia methodus multo fa inde derivari poterit, qua omnes litteras q, r, s [etc.] per solam litteram p suis derivatis p', p'' [etc.] determinare licebit; tum enim, postquam series rorum p iam satis longe fuerit computata, inde etiam valores litteran r, s etc. multo leviori labore colligi poterunt, id quod in sequenti ostendemus.

DETERMINATIO LITTERARUM q, r, s, t etc. PER SOLAM PRIMAM p SUIS DERIVATIS

41. Posito brevitatis gratia nostro trinomio

$$1+x+xx=X$$

eius binas potestates X^n et X^{n+1} evolutas ita disponamus, ut pares pote ipsius x sibi invicem subscriptae appareant, hoc modo:

$$X^n \quad =1+nx \qquad +\cdots+q\,x^{n-1}+px^n+q\,x^{n+1}+r\,x^{n+2}+s\,x^{n+3}+\text{et}$$
$$X^{n+1}=1+(n+1)x+\cdots+r'x^{n-1}+q'x^n+p'x^{n+1}+q'x^{n+2}+r'x^{n+3}+\text{e}$$

quo facto supra iam notavimus quemlibet coefficientem inferioris seriei a superiori cum binis praecedentibus.

42. Per hanc igitur legem sequentes nanciscemur aequalitates:

$$p' = q + p + q = 2q + p,$$

$$q' = r + q + p,$$

$$r' = s + r + q$$

etc.,

nde colligimus sequentes determinationes:

$$q = \frac{p' - p}{2}, \quad r = q' - q - p, \quad s = r' - r - q, \quad t = s' - s - r \text{ etc.}$$

43. Manifestum est hic formulam $p' - p$ exprimere incrementum quantitis p, dum exponens n unitate augetur, quod cum per Δp exprimi soleat, qualitates inventae sequenti modo succinctius exhiberi poterunt:

$$q = \frac{1}{2}\Delta p \quad \text{sive} \quad 2q = \Delta p, \quad 2r = 2\Delta q - 2p, \quad 2s = 2\Delta r - 2q \text{ etc.}$$

44. Charactere autem hoc differentiali Δ in usum vocato, cum sit

$$2q = \Delta p, \quad \text{erit} \quad 2\Delta q = \Delta\Delta p$$

eoque

$$2r = \Delta\Delta p - 2p \quad \text{hincque} \quad 2\Delta r = \Delta^3 p - 2\Delta p,$$

quo porro fit

$$2s = \Delta^3 p - 3\Delta p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta s = \Delta^4 p - 3\Delta\Delta p,$$

rgo

$$2t = \Delta^4 p - 4\Delta\Delta p + 2p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta t = \Delta^5 p - 4\Delta^3 p + 2\Delta p.$$

inc porro fit

$$2u = \Delta^5 p - 5\Delta^3 p + 5\Delta p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta u = \Delta^6 p - 5\Delta^4 p + 5\Delta\Delta p,$$

45. Quodsi hos coëfficientes numericos attentius consideremu
gressionis convenire deprehenditur cum serie Geometris satis nota
valore z, cui ordinis index positus est λ, obtinebimus sequentem

$$2z = \Delta^{\lambda} p - \lambda \Delta^{\lambda-2} p + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1\cdot 2} \Delta^{\lambda-4} p - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1\cdot 2\cdot 3} \Delta^{\lambda-6} p$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Delta^{\lambda-8} p - \frac{\lambda(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda-8)(\lambda-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \Delta^{\lambda-1}$$

quam seriem eo usque tantum continuari oportet, quamdiu indic
non evadunt negativi. Ita si sumamus $\lambda = 6$, quo casu fit $z = v$,
generali utique prodit

$$2v = \Delta^6 p - 6\Delta^4 p + 9\Delta^2 p - 2p.$$

46. Quo indoles huius seriei clarius perspiciatur, meminisse
formam

$$\frac{(x+\sqrt{xx-4})^n}{2^n} + \frac{(x-\sqrt{xx-4})^n}{2^n}$$

in sequentem seriem resolvi:

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-6} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo nostro scopo iam est satisfactum, cum omnes
s, t etc. per solam primam p suasque derivatas p', p'', p''' etc. o
cuerimus.

TERMINATIO QUANTITATIS p PER FORMULAM FINITAM INTEGRALEM

47. Cum sit per tertiam formam supra [§ 16] expositam

$$p = 1 + \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} + \binom{6}{3}\binom{n}{6} + \text{etc.},$$

libet terminus in genere erit $\binom{2\alpha}{\alpha}\binom{n}{2\alpha}$, quem excipit iste sequens: $\binom{2\alpha+2}{\alpha+1}\binom{n}{2\alpha+2}$.
m igitur facta evolutione sit

$$\binom{2\alpha}{\alpha} = \frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdots(\alpha+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\alpha}$$

nilique modo

$$\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)2\alpha\cdots(\alpha+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots(\alpha+1)},$$

ec posterior forma per priorem divisa dat quotum

$$\frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha+1},$$

quo erit

$$\binom{2\alpha+2}{\alpha+1} = \frac{4\alpha+2}{\alpha+1}\binom{2\alpha}{\alpha}.$$

48. Hac ergo reductione adhibita sumto

$$\alpha = 1 \quad \text{erit} \quad \binom{4}{2} = \frac{6}{2}\binom{2}{1};$$

nto

$$\alpha = 2 \quad \text{erit} \quad \binom{6}{3} = \frac{10}{3}\binom{4}{2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1};$$

$$\alpha = 3, \quad \text{fit} \quad \binom{8}{4} = \frac{14}{4}\binom{6}{3} = \frac{14}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1};$$

n si

$$\alpha = 4, \quad \text{fiet} \quad \binom{10}{5} = \frac{18}{5}\binom{8}{4} = \frac{18}{5}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1}$$

$$+\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\binom{n}{10}+\text{etc.}$$

49. Nunc igitur videamus, quomodo formam finitam in
gari oporteat, cuius integrale intra datos terminos inclusu
seriem perducat. Hunc in finem contemplari conveniet
$(1+x)^n$, quippe cuius evolutio praebet hanc seriem:

$$1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}xx+\binom{n}{3}x^3+\text{etc.},$$

cuius termini alterni iam continent characteres nostros litte

50. Hanc igitur seriem in duas partes discerpamus se
alternos ac ponamus

$$M=\ 1\quad+\binom{n}{2}xx+\binom{n}{4}x^4+\binom{n}{6}x^6+\text{etc}$$

$$N=\binom{n}{1}x+\binom{n}{3}\ x^3+\binom{n}{5}x^5+\binom{n}{7}x^7+\text{etc}$$

ita ut sit

$$(1+x)^n=M+N.$$

Nunc autem inquiramus, quomodo seriem priorem, M, per
ticas tractari oporteat, ut ipsa series proposita seu valor
oriatur.

51. Ad hoc efficiendum ducamus quantitatem M in
differentiale ∂v cuiuspiam functionis ipsius x, atque sequente
determinemus, ut intra certos terminos, veluti ab $x=a$ us
cludantur, quas conditiones ita comparatas esse oportet, ut
ditionibus satisfiat:

$$1.\ \int xx\partial v = \frac{2}{1} v,$$

$$2.\ \int x^4\partial v = \frac{2\cdot 6}{1\cdot 2} v,$$

$$3.\ \int x^6\partial v = \frac{2\cdot 6\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} v,$$

$$4.\ \int x^8\partial v = \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} v$$

etc.;

hoc enim modo integrale $\int M\partial v$ producet hanc seriem:

$$v + \frac{2}{1}\left(\frac{n}{2}\right)v + \frac{2\cdot 6}{1\cdot 2}\left(\frac{n}{4}\right)v + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{n}{6}\right)v + \text{etc.},$$

ita ut hoc modo id quod quaerimus nanciscamur,

$$p = \frac{\int M\partial v}{v}.$$

52. Formularum igitur integralium, quas hic exposuimus, quaelibet a praecedente pendet, ut sit

$$\int xx\partial v = \frac{2}{1}\int \partial v,$$

$$\int x^4\partial v = \frac{6}{2}\int xx\partial v,$$

$$\int x^6\partial v = \frac{10}{3}\int x^4\partial v,$$

$$\int x^8\partial v = \frac{14}{4}\int x^6\partial v$$

etc.

sicque in genere effici debet, ut fiat

$$\int x^{2m}\partial v = \frac{4m-2}{m}\int x^{2m-2}\partial v.$$

accommodari debent.

53. Cum igitur pro his terminis integrationis esse debeat

$$m\int x^{2m}\partial v = (4m-2)\int x^{2m-2}\partial v,$$

ponamus esse generatim

$$m\int x^{2m}\partial v = (4m-2)\int x^{2m-2}\partial v + \Pi x^{2m-1},$$

ubi scilicet Π eiusmodi sit functio, ut pars subnexa x^{2m-1} utroqu tam $x=a$ quam $x=b$ in nihilum abeat. Haec iam aequatio differ per x^{2m-2} divisa dat

$$mxx\partial v = (4m-2)\partial v + (2m-1)\Pi\partial x + x\partial\Pi,$$

quae aequatio subsistere debet pro omnibus numeris m.

54. Hinc igitur ista aequatio in duas discerpi debebit, quar contineat solos terminos littera m affectos, altera vero reliquos, quae aequationes erunt

$$xx\partial v = 4\partial v + 2\Pi\partial x$$

et

$$0 = -2\partial v - \Pi\partial x + x\partial\Pi.$$

Ex priori fit

$$\partial v = \frac{2\Pi\partial x}{xx-4};$$

ex altera vero fit

$$\partial v = \frac{x\partial\Pi - \Pi\partial x}{2},$$

qui ambo valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:

$$4\Pi\partial x = (xx-4)(x\partial\Pi - \Pi\partial x) = x^3\partial\Pi - xx\Pi\partial x - 4x\partial\Pi + 4$$

cque colligitur
$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{x \partial x}{xx - 4},$$
de integrando fit
$$l\Pi = l\sqrt{xx - 4}$$
oque
$$\Pi = C\sqrt{xx - 4}$$
etiam
$$\Pi = C\sqrt{4 - xx};$$
valore invento assequimur nostrum differentiale assumtum
$$\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{4 - xx}},$$
de fit
$$v = 2C\,\mathrm{A}\sin.\frac{x}{2}.$$

55. Consideremus nunc formulam suffixam
$$\Pi x^{2m-1} = Cx^{2m-1}\sqrt{4 - xx},$$
am deprehendimus triplici modo in nihilum abire posse: primo scilicet, ando $x = 0$, casu excepto quo $m = 0$; secundo, casu quo $x = 2$; ac tertio, u quo $x = -2$, ex quibus ergo binos terminos illos a et b desumi oportet. autem hos binos terminos eligi conveniet, ut etiam altera integrationis rs, $\int N\partial v$, commode exprimatur. Quia enim posuimus
$$(1 + x)^n = M + N,$$
am ad integrale $\int N\partial v$ est respiciendum, quod si penitus evanesceret, pro minis integrationis sine dubio id esset commodissimum, tum enim foret
$$\int(M + N)\partial v$$
o
$$\int\partial v(1 + x)^n = \int M\partial v,$$
nsequenter haberemus $p = \frac{\int M\partial v}{v}$.

unde conficitur

$$\int N\partial v = \left(\frac{n}{1}\right)\int x\partial v + \left(\frac{n}{3}\right)\int x^3\partial v + \left(\frac{n}{5}\right)\int x^5\partial v + \text{etc.},$$

ubi per easdem reductiones, quas pro littera M instituimus, quae integralis ad praecedentem ope reductionis

$$\int x^{2m}\partial v = \frac{4m-2}{m}\int x^{2m-2}\partial v$$

reduci potest. Sumto enim $m = \frac{3}{2}$ erit

$$\int x^3\partial v = \frac{8}{3}\int x\partial v.$$

Sumto $m = \frac{5}{2}$ erit

$$\int x^5\partial v = \frac{16}{5}\int x^3\partial v.$$

Sumto $m = \frac{7}{2}$ erit

$$\int x^7\partial v = \frac{24}{7}\int x^5\partial v$$

etc.,

unde patet, si modo $\int x\partial v$ evanesceret, etiam sequentia omnia oss

57. Quoniam igitur invenimus

$$\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{(4-xx)}},$$

erit

$$x\partial v = \frac{2Cx\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}$$

hincque

$$\int x\partial v = 2C\sqrt{4-xx},$$

ae expressio binis casibus vel $x = +2$ vel $x = -2$ evanescit. Quamobrem terminos integrationis constituamus $x = 2$ et $x = -2$, non solum partes ae subnexae Hx^{2m-1}, verum etiam totus valor integralis $\int N\partial v$ evanescet, que adeo hoc casu quaesito nostro perfecte satisfecimus, cum sit

$$p = \frac{\int \partial v (1+x)^n}{v}.$$

58. Cum igitur invenerimus

$$\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{(4 - xx)}},$$

is integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x = 2$, erit

$$v = 2C \,\mathrm{A} \sin \frac{x}{2} - 2C\frac{\pi}{2},$$

ae expressio reducitur ad hanc:

$$v = -2C \,\mathrm{A} \cos \frac{x}{2};$$

de hoc integrali usque ad alterum terminum $x = -2$ extenso prodit $= -2C\pi$. His igitur valoribus substitutis erit formula quaesita

$$p = -\frac{1}{\pi}\int \frac{(1+x)^n \partial x}{\sqrt{(4 - xx)}}.$$

aec scilicet formula integralis a termino $x = 2$ usque ad terminum $x = -2$ tensa verum praebebit valorem ipsius p.

59. Quo hanc formulam concinniorem reddamus, statuamus $x = 2\cos\varphi$, i evidens est casu $x = 2$ fieri angulum $\varphi = 0$; casu vero $x = -2$ fieri $= \pi$, ita ut hoc angulo introducto integrale capi debeat a termino $\varphi = 0$ que ad $\varphi = \pi$; tum vero erit

$$\partial x = -2\partial\varphi \sin\varphi \quad \text{et} \quad \sqrt{4 - xx} = 2\sin\varphi,$$

a substitutione facta nanciscemur hanc aequationem:

$$p = +\frac{1}{\pi}\int (1 + 2\cos\varphi)^n \partial\varphi \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix}.$$

DETERMINATIO RELIQUARUM LITTERARUM PER FORMULAS INTEGRALES

60. Hoc facile praestari poterit per relationes, quas supra int-
teras tradidimus. Primo scilicet habuimus $2q = \Delta p = p' - p$, ubi
ex p, si loco n scribatur $n+1$. Quoniam igitur modo invenimus

$$p = \frac{1}{\pi}\int (1 + 2\cos\varphi)^n \partial\varphi,$$

erit

$$p' = \frac{1}{\pi}\int (1 + 2\cos\varphi)^{n+1} \partial\varphi,$$

hincque ergo erit

$$p' - p = \frac{2}{\pi}\int \cos\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^n \partial\varphi.$$

quo valore substituto reperietur

$$q = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^n \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix};$$

hinc ergo porro erit

$$q' = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^{n+1}.$$

61. Supra autem vidimus esse $r = q' - q - p$, nunc vero erit

$$q' - q = \frac{2}{\pi}\int \partial\varphi \cos\varphi^2 (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

Hinc ergo si subtrahatur p, ob $2\cos\varphi^2 - 1 = \cos 2\varphi$ elicimus littera

$$r = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 2\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^n,$$

unde iterum fit

$$r' = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 2\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^{n+1}.$$

62. Quoniam igitur supra invenimus $s = r' - r - q$, habebimus hi

$$r' - r = \frac{2}{\pi}\int \partial\varphi \cos\varphi \cos 2\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

Hinc ergo si subtrahatur q, ob $2\cos\varphi\cos 2\varphi - \cos\varphi = \cos 3\varphi$ erit

$$s = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 3\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

Simili modo iam evidens est fore

$$t = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 4\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n;$$

eodemque modo reperietur fore

$$u = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 5\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n;$$

atque adeo in genere erit

$$z = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos \lambda\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

63. Quoniam Analysis, qua hic usi sumus, prorsus est singularis e consueta, haud abs re erit veritatem harum formularum demonstratio lytica muniri, quam de singulis uno quasi labore sequenti modo i licebit. Incohandum erit ab evolutione formulae $(1 + 2\cos\varphi)^n$, quae ad hanc seriem:

$$1 + \binom{n}{1} 2\cos\varphi + \binom{n}{2} 4\cos\varphi^2 + \binom{n}{3} 8\cos\varphi^3 + \binom{n}{4} 16\cos\varphi^4 + \text{e}$$

Per notas autem angulorum reductiones[1]) constat fore

1) Vide e. g. Commentationem 246 indicis ENESTROEMIANI, § 6, Corollarium 3. *EULERI Opera omnia*, vol. I14, p. 549. C. B.

$$2\cos\varphi = 2\cos\varphi,$$

$$4\cos\varphi^2 = 2\cos 2\varphi + 2,$$

$$8\cos\varphi^3 = 2\cos 3\varphi + 6\cos\varphi,$$

$$16\cos\varphi^4 = 2\cos 4\varphi + 8\cos 2\varphi + 6,$$

$$32\cos\varphi^5 = 2\cos 5\varphi + 10\cos 3\varphi + 20\cos\varphi,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$2^\alpha\cos\varphi^\alpha = 2\cos\alpha\varphi + 2\binom{\alpha}{1}\cos(\alpha-2)\varphi + 2\binom{\alpha}{2}\cos(\alpha$$

$$+ 2\binom{\alpha}{3}\cos(\alpha-6)\varphi + \text{etc.},$$

ubi probe notandum est, quando terminus ultimus est absolut simplum capi debere; praeterea vero etiam cosinus angulor prorsus omitti debent.

64. His igitur rite dispositis erit

$$(1+2\cos\varphi)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right) 2\cos\varphi + \binom{n}{2} 2(\cos 2\varphi + 1) + 2\binom{n}{3}(c$$

$$+ 2\binom{n}{4}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3) + 2\binom{n}{5}(\cos 5\varphi + 5\cos 3\varphi -$$

$$+ 2\binom{n}{6}(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10) + \text{etc.},$$

unde sequentes integrationes sunt petendae.

65. Incipiamus a prima littera p, ubi hanc seriem duc tegrare oportet. Cum igitur in genere sit

$$\int \partial\varphi \cos m\varphi = \frac{1}{m}\sin m\varphi,$$

iste valor iam evanescit posito $\varphi = 0$, pro altero integrationi manifesto evanescit, si quidem omnes numeri n sunt integri.

gitur soli termini absoluti relinquuntur; tum vero integrali rite sumto erit $\int \partial\varphi = \pi$, quo observato erit nostrum integrale

$$\int \partial\varphi\,(1+2\cos\varphi)^n = \pi + 2\left(\frac{n}{2}\right)\pi + 6\left(\frac{n}{4}\right)\pi + 20\left(\frac{n}{6}\right)\pi + \text{etc.}$$

quodsi hic forma generalis supra data consulatur, hi coëfficientes numerici revocentur ad formas $\left(\frac{2}{1}\right)$, $\left(\frac{4}{2}\right)$, $\left(\frac{6}{3}\right)$ etc., prorsus uti veritas formulae postulat. Erit enim

$$p = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi\,(1+2\cos\varphi)^n = 1 + \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{n}{6}\right) + \text{etc.}$$

66. Pergamus ad secundam litteram, q, ubi superiorem seriem per $\partial\varphi\cos\varphi$ multiplicari et integrari oportet. Ad hoc observetur esse in genere

$$\int \partial\varphi\cos\varphi\cos m\varphi = \frac{1}{2(m+1)}\sin(m+1)\varphi + \frac{1}{2(m-1)}\sin(m-1)\varphi,$$

quae expressio posito $\varphi=\pi$ in nihilum abit, solo casu excepto quo $m=1$, quippe quo fit

$$\int \partial\varphi\cos\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi = \frac{\pi}{2}\,\cdot$$

ex quo intelligitur ex superiori serie alios terminos hic non in computum venire, nisi qui contineant $\cos\varphi$, qui sunt

$$2\left(\frac{n}{1}\right)\cos\varphi + 2\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\cos\varphi + 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{n}{5}\right)\cos\varphi + 2\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{n}{7}\right)\cos\varphi + \text{etc.}$$

hi autem termini ducti in $\partial\varphi\cos\varphi$ et integrati, ob

$$\int 2\,\partial\varphi\cos\varphi^2 = \pi$$

dabunt per π divisi ipsum valorem

$$q = \left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{n}{5}\right) + \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{n}{7}\right) + \text{etc.}$$

$$\cos 2\varphi \cos m\varphi = \frac{1}{2}\cos(m+2)\varphi + \frac{1}{2}\cos(m-2)$$

per $\partial\varphi$ multiplicando integrale pro termino $\varphi = \pi$ semper ev
solo casu $m = 2$, quippe quo fit

$$\int \partial\varphi \cos 2\varphi^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Hic igitur ex serie superiori soli termini per $\cos 2\varphi$ affect
veniunt, qui sunt

$$2\cos 2\varphi\left(\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \text{etc}\right.$$

Quia igitur $2\int\partial\varphi\cos 2\varphi^2 = \pi$, omnibus terminis colligendis
dendo reperitur

$$r = \binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \text{etc}$$

68. Quo haec clariora reddantur ac facilius ad valorem
commodari queant, evolutionem potestatis $(1 + 2\cos\varphi)^n$ s
cosinus multiplorum anguli φ disponamus hoc modo:

$$\begin{aligned}
(1 + 2\cos\varphi)^n = 1 &+ \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} + \binom{6}{3}\binom{n}{6} + \binom{8}{4}\binom{n}{8} \\
&+ 2\cos\varphi\left(\binom{n}{1} + \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} + \binom{7}{3}\binom{n}{7} + \binom{9}{4}\binom{n}{9}\right. \\
&+ 2\cos 2\varphi\left(\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \binom{10}{4}\binom{n}{10}\right. \\
&+ 2\cos 3\varphi\left(\binom{n}{3} + \binom{5}{1}\binom{n}{5} + \binom{7}{2}\binom{n}{7} + \binom{9}{3}\binom{n}{9} + \binom{11}{4}\binom{n}{11}\right. \\
&\quad \cdots \\
&+ 2\cos\lambda\varphi\left(\binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4} + \binom{\lambda+6}{3}\right. \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

69. Quodsi iam hanc aequationem per $\partial\varphi\cos\lambda\varphi$ multiplicemus et integremus, omnia haec integralia terminis praescriptis inclusa evanescent excepto membro $2\cos\lambda\varphi(\ldots)$, propterea quod productum $2\cos\lambda\varphi^2$ contine partem absolutam, unde per integrationem oritur π, ita ut sit

$$\int\partial\varphi\cos\lambda\varphi\,(1+2\cos\varphi)^n = \pi\left(\binom{n}{\lambda}+\binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2}+\binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4}+\text{etc.}\right).$$

qui valor per π divisus ipsum valorem ipsius z supra inventum praebet; und veritas harum novarum expressionum luculenter est demonstrata.

70. Ceterum, si singulas series paragraphi penultimi vel leviter consideremus, deprehendimus eas ipsis litteris nostris p, q, r, s etc. esse aequales ita ut nunc sit

$$(1+2\cos\varphi)^n = p + 2q\cos\varphi + 2r\cos2\varphi + 2s\cos3\varphi + 2t\cos4\varphi + \text{etc.},$$

ubi simul ratio est manifesta, cur litterae q, r, s etc. duplicentur, quipp quae in hoc est posita, quod in evolutione formulae $(1+x+xx)^n$ littera p semel tantum in medio, reliquae vero litterae bis, a medio aequidistantes occurrunt. Ex quo haec egregia affinitas inter illas binas potestates $(1+x+xx)$ et $(1+2\cos\varphi)^n$ summa attentione digna est censenda.

INVESTIGATIO SUMMAE SERIEI

$$P = 1 + x + 3xx + 7x^3 + 19x^4 + \cdots + px^n + p'x^{n+1} + p''x^{n+2} + \text{etc.}$$

71. Quoniam huius seriei terminus generalis est px^n, quem sequuntu $p'x^{n+1}$ et $p''x^{n+2}$, inter has ternas quantitates p, p', p'' invenimus supra [§ 38 hanc relationem:

$$(n+2)p'' = (2n+3)p' + 3(n+1)p,$$

quam hoc modo ad usum nostrum accommodatam referamus:

$$3(n+1)p + (n+1)p' + (n+2)p' - (n+2)p'' = 0.$$

eiusmodi operationes instituamus, quibus relatio modo allata obtinea
quod sequenti modo commodissime fiet:

$$\frac{3\partial Px}{\partial x} = \qquad 3 + \;\, 6x + 27xx + \cdots + 3(n+1)p\, x^n + \text{etc.},$$

$$+\frac{\partial P}{\partial x} = \qquad 1 + \;\, 6x + 21xx + \cdots + (n+1)p'\, x^n + \text{etc.},$$

$$+\frac{\partial Px}{x\partial x} = \frac{1}{x} + 2 + \;\, 9x + 28xx + \cdots + (n+2)p'\, x^n + \text{etc.},$$

$$-\frac{\partial P}{x\partial x} = -\frac{1}{x} - 6 - 21x - 76xx - \cdots - (n+2)p''x^n - \text{etc.}$$

Colligantur iam hae quatuor series in unam summam, atque obtinel
sequentem aequationem:

$$\frac{3\partial Px}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Px}{x\partial x} - \frac{\partial P}{x\partial x} = 0,$$

quandoquidem omnes termini se mutuo destruunt.

73. Hoc ergo modo *deducti* sumus ad aequationem finitam differenti
primi gradus, quae per $x\partial x$ multiplicata et in ordinem redacta ita se hab

$$P\partial x(3x+1) + \partial P(3xx + 2x - 1) = 0,$$

unde ergo fit

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\partial x(1+3x)}{1-2x-3xx},$$

quae aequatio integrata praebet

$$l\,P = -\frac{1}{2}\,l(1-2x-3xx) + l\,C,$$

consequenter

$$P = \frac{C}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}.$$

ad constantem C determinandam notetur tantum nostram seriem prope-m casu $x=0$ praebere $P=1$, unde patet sumi debere $C=1$, ita ut sit ima seriei

$$P=\frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}.$$

74. Praeter ergo expectationem pertigimus ad summam algebraicam, quae ressio etiam ita est comparata, ut in seriem conversa ipsam nostram em reproducat, id quod ostendisse operae erit pretium. Cum igitur sit

$$P=(1-2x-3xx)^{-\frac{1}{2}},$$

uius trinomii partes posteriores coniunctim spectentur, evolutio nobis dabit

$$P=1+\frac{1}{2}(2x+3xx)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(2x+3xx)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(2x+3xx)^3+\text{etc.},$$

m sufficiet ad potestatem tantum tertiam usque evolvisse. Hoc modo :iscemur

$$\begin{aligned} P &= 1+x+\frac{3}{2}xx+\frac{9}{2}x^3+\text{etc.}\\ &\qquad\quad +\frac{3}{2}xx+\frac{5}{2}x^3+\text{etc.}\\ &= 1+x+\ 3xx+\ 7x^3+\text{etc.}, \end{aligned}$$

e igitur perfecte congruit.

75. At vero haec eadem summa adhuc alio modo investigari potest, ex nula scilicet integrali, quam pro valore litterae p invenimus

$$p=\frac{1}{\pi}\int\partial\varphi(1+2\cos\varphi)^n\left[\begin{smallmatrix}\text{a }\varphi=0\\ \text{ad }\varphi=\pi\end{smallmatrix}\right].$$

c enim formula, sumto $n=0$, per x multiplicata dat terminum secundum, x; porro $n=2$, per xx multiplicata dat terminum tertium, $3xx$; quo obser-summa quaesita ita poterit repraesentari:

$$=\frac{1}{\pi}\int\partial\varphi\,(1+x(1+2\cos\varphi)+xx(1+2\cos\varphi)^2+x^3(1+2\cos\varphi)^3+\text{etc.}),$$

ubi probe est observandum in hac integratione quantitatem x tan-
stantem spectari, siquidem solus angulus φ est variabilis.

76. Evidens autem est seriem infinitam, in quam elementu-
oportet, esse geometricam, cuius ergo summa erit

$$\frac{1}{1-x(1+2\cos\varphi)}=\frac{1}{1-x-2x\cos\varphi},$$

sicque adeo pro P iam habemus hanc expressionem finitam:

$$P=\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial\varphi}{1-x-2x\cos\varphi}\begin{bmatrix}\text{a }\varphi=0\\ \text{ad }\varphi=\pi\end{bmatrix},$$

quae aequatio ita poterit exhiberi:

$$P=\frac{1}{\pi(1-x)}\int\frac{\partial\varphi}{1-\frac{2x}{1-x}\cos\varphi}\begin{bmatrix}\text{a }\varphi=0\\ \text{ad }\varphi=\pi\end{bmatrix},$$

ubi iam brevitatis gratia statuamus $\frac{2x}{1-x}=k$, ut habeamus

$$P=\frac{1}{\pi(1-x)}\int\frac{\partial\varphi}{1-k\cos\varphi}.$$

77. Constat autem huius formulae $\frac{\partial\varphi}{1+n\cos\varphi}$ integrale esse

$$\frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\,\mathrm{A}\cos\frac{\cos\varphi+n}{1+n\cos\varphi};$$

unde, si loco n scribamus $-k$, adipiscimur pro nostro casu

$$P=\frac{1}{\pi(1-x)\sqrt{(1-kk)}}\,\mathrm{A}\cos\frac{\cos\varphi-k}{1-k\cos\varphi},$$

ubi constantis additione non est opus, quia haec expressio casu φ
evanescit. Faciamus igitur pro altero termino $\varphi=\pi$, unde fit

$$\cos\varphi=-1 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}\cos\frac{\cos\varphi-k}{1-k\cos\varphi}=\mathrm{A}\cos-1=\pi;$$

habebimus

$$P = \frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-kk)}},$$

expressio, ob $k = \frac{2x}{1-x}$, abit in hanc:

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}},$$

ut ante.

. Cum sit

$$1 - 2x - 3xx = (1-x)^2 - 4xx = (1+x)(1-3x),$$

r seriem nostram summandam duobus casibus fieri infinite magnam, scilicet altero casu quo $x = -1$, altero vero quo $x = \frac{1}{3}$. Tum vero nostra series summam finitam, quando x continetur intra hos limites: -1 et $\frac{1}{3}$, em x extra hos limites accipiatur, tum summa semper erit imaginaria. nto $x = \frac{1}{4}$ habebitur haec summatio:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \frac{19}{4^4} + \frac{51}{4^5} + \frac{141}{4^6} + \text{etc.} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

VESTIGATIO SUMMAE RELIQUARUM SERIERUM Q, R, S etc. SUPRA § 6 EXPOSITARUM

. Incipiamus a serie Q, quae est

$$Q = xx + 2x^3 + 6x^4 + \cdots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + q''x^{n+3} + \text{etc.},$$

rimus terminus, xx, ex potestate $n = 1$ oritur; ubi, perinde ac si seriem 0 inchoare velimus, praefigi debet terminus $0x$. Pro hac autem serie mus supra esse $q = \frac{1}{2}(p' - p)$, unde huius seriei summa ex serie p sequenti modo elici poterit.

80. Cum sit

$$P \;= 1 + x + 3xx + \cdots + px^n + p'x^{n+1} + \text{etc.},$$

erit

$$Px = \quad x + \;xx + \cdots \qquad + p\,x^{n+1} + \text{etc.},$$

quae posterior series a priori subtracta relinquit

$$P(1-x) = 1 + 2xx + \cdots + (p'-p)x^{n+1} + \text{etc.}$$

Quare cum sit $p'-p=2q$, erit

$$P(1-x) = 1 + 2Q;$$

sicque innotescit huius seriei summa, cum sit

$$Q = \frac{P(1-x)-1}{2}.$$

Modo ante autem vidimus esse

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}},$$

sicque habebimus

$$Q = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2\sqrt{(1-2x-3xx)}}.$$

81. Procedamus ad seriem R, quae ita se habebat:

$$R = x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \cdots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.},$$

cuius primus terminus, x^4, ex potestate $n=2$ est ortus, unde praefi
piendi sunt bini termini $0x^2 + 0x^3$, ad cuius summam inveniendam
esse $r = q' - q - p$. Hinc, si sequentes operationes instituantur:

$$\begin{aligned}
Q \;&= \quad xx + 2x^3 + \cdots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + \text{etc.},\\
-Qx &= \qquad\quad - \;x^3 - \cdots - \quad \cdot\;\cdot\; - q\,x^{n+2} - \text{etc.},\\
-Px^2 &= -xx - \;x^3 - \cdots - \quad \cdot\;\cdot\; - p\,x^{n+2} - \text{etc.},
\end{aligned}$$

inde coniunctim fiet

$$Q(1-x)-Pxx=x^4+3x^5+\cdots+(q'-q-p)x^{n+2}+\text{etc.}=R.^{1)}$$

82. Hoc igitur modo summam R determinavimus per binas series cedentes Q et P, quae cum iam sint cognitae, etiam summam seriei R braice per certam functionem ipsius x expressam sumus adepti, quae quo commode evolvi queat, deinceps ostendemus.

83. Pro serie S, quae ita erat proposita:

$$S=x^6+4x^7+15x^8+\cdots+sx^{n+3}+s'x^{n+4}+\text{etc.},$$

ei tres termini evanescentes praefigi sunt censendi, scilicet $0x^3+0x^4+$ siquidem a potestate $n=0$ incipere velimus. Supra autem invenimus $s=r'-r-q$, unde sequentes operationes instituamus:

$$\begin{array}{rcl} R &=& x^4+3x^5+10x^6+\cdots+rx^{n+2}+r'x^{n+3}+\text{etc.},\\ -Rx &=& \quad -x^5-3x^6-\cdots-\quad\cdot\;\cdot\quad -rx^{n+3}-\text{etc.},\\ -Qxx &=& -x^4-2x^5-6x^6-\cdots-\quad\cdot\;\cdot\quad -qx^{n+3}-\text{etc.}, \end{array}$$

quibus tribus seriebus collectis oritur haec series:

$$x^6+\cdots+sx^{n+3}+\text{etc.},$$

quae est ipsa series S. Quocirca summa huius seriei per binas praeced Q et R ita determinatur, ut sit

$$S=R(1-x)-Qxx,$$

cuius evolutio etiam satis simpliciter expediri poterit, uti mox ostende

1) Editio princeps:

$$Q(1-x)-Pxx=(q'-q-p)x^{n+2}=R.$$

C. I

$$S \quad = \quad x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \cdots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.},$$
$$-Sx \quad = \quad - x^7 - 4x^8 - \cdots - \quad \cdot \quad \cdot \quad - sx^{n+4} - \text{etc.},$$
$$-Rxx = -x^6 - 3x^7 - 10x^8 - \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad - rx^{n+4} - \text{etc.}$$

Cum igitur $s' - s - r = t$, hae tres series collectae dabunt

$$S(1-x) - Rxx = x^8 + \cdots + tx^{n+4} + \text{etc.},$$

quae cum sit ipsa series T, erit

$$T = S(1-x) - Rxx.$$

85. Hinc igitur manifestum est singulas harum serierum satis sim[p]
per binas praecedentes determinari posse atque adeo per legem penit[u]
formem. Eas coniunctim ob oculos ponamus.

$$Q = \frac{P(1-x)-1}{2},$$
$$R = Q(1-x) - Pxx,$$
$$S = R(1-x) - Qxx,$$
$$T = S(1-x) - Rxx,$$
$$U = T(1-x) - Sxx$$
$$\text{etc.},$$

unde patet omnes has summas secundum seriem recurrentem procedere,
scala relationis est $(1-x), -xx$. Verum mox patebit hanc seriem adeo
geometricam.

86. Ad hoc ostendendum, cum facta evolutione sit

$$\frac{Q}{P} = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2},$$

...camus $Q = Pv$; inde autem sublata irrationalitate, cum sit

$$\sqrt{1 - 2x - 3xx} = 1 - x - 2v,$$

haec aequatio:

$$(1 - x)^2 - 4xx = (1 - x)^2 - 4v(1 - x) + 4vv,$$

reducitur ad istam:

$$v(1 - x) - xx = vv,$$

probe notasse iuvabit.

Iam pro serie R, si loco Q hunc valorem Pv substituamus, orietur aequatio:

$$R = P(v(1 - x) - xx)$$

... per relationem modo notatam

$$R = Pvv.$$

... porro loco Q et R valores inventos scribamus, nanciscemur simili modo

$$S = Pv\,(v(1 - x) - xx) = Pv^3,$$

$$T = Pvv\,(v(1 - x) - xx) = Pv^4,$$

$$V = Pv^3\,(v(1 - x) - xx) = Pv^5,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$Z = Pv^{\lambda-1}(v(1 - x) - xx) = Pv^{\lambda+1}.$$

88. Quodsi iam has determinationes ad formulas integrales, litteris p, q, r etc. invenimus, transferamus, quoniam invenimus

$$z = \frac{1}{\pi} \int \partial\varphi . \cos \lambda\varphi \, (1 + 2\cos\varphi)^n,$$

si exponenti n successive valores tribuamus 0, 1, 2, 3, 4 etc., qui a potestate x^λ inchoare est censenda, formula differentialis $\partial\varphi \cos \lambda$ seriem geometricam multiplicari debebit:

$$(1 + 2\cos\varphi)^0 x^\lambda + (1 + 2\cos\varphi)^1 x^{\lambda+1} + (1 + 2\cos\varphi)^2 x^{\lambda+2} + \text{et}$$

cuius summa est

$$\frac{x^\lambda}{1 - x - 2x\cos\varphi},$$

qua ergo in calculum introducta summa quaesita Z ita exprimetu

$$Z = \frac{1}{\pi} \int \frac{x^\lambda \partial\varphi \cos\lambda\varphi}{1 - x - 2x\cos\varphi} \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix},$$

ubi quantitas x est constans.

89. Quoniam igitur hic invenimus istam summam, scilicet

$$Z = Pv^\lambda = \frac{v^\lambda}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}$$

existente

$$v = \frac{1 - x - \sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}{2},$$

nunc huius ipsius formulae integralis valorem adeo algebraicur poterimus, quandoquidem nunc novimus esse

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{x^\lambda \partial\varphi \cos\lambda\varphi}{1 - x - 2x\cos\varphi} = \frac{v^\lambda}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}},$$

sive multiplicando per $\frac{\pi}{x^\lambda}$ habebimus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{1 - x - 2x\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}} \left(\frac{v}{x}\right)^\lambda.$$

90. Quoniam haec integratio maiori attentione digna videtur, eam in commodiorem formam transfundamus et, quoniam x et v hic ut constantes spectantur, ponamus $\frac{v}{x} = b$, atque ob

$$v = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3xx}}{2}$$

erit

$$2bx = 1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3xx},$$

quae aequatio sublata irrationalitate praebet

$$4bbxx - 4bx(1-x) + (1-x)^2 = (1-x)^2 - 4xx,$$

quae reducitur ad hanc:

$$bbx - b + bx = -x,$$

unde ipsa quantitas x satis commode determinatur, cum fiat $x = \frac{b}{bb+b+1}$ ideoque

$$1 - x = \frac{bb+1}{bb+b+1},$$

atque porro, cum esset

$$\sqrt{1 - 2x - 3xx} = 1 - x - 2bx,$$

erit nunc

$$\sqrt{1 - 2x - 3xx} = \frac{1 - bb}{1 + b + bb}.$$

91. Quodsi ergo loco quantitatis x litteram b in nostrum calculum introducamus, integratio inventa ad hanc formam reducetur simpliciorem:

$$\int \frac{\partial \varphi \cos \lambda \varphi}{1 - 2b\cos\varphi + bb} \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi b^\lambda}{1 - bb},$$

cuius veritas ex calculis hactenus expeditis est deducta; verum etiam immediate et directo demonstrari potest, quo ipso praecedentia omnia eo magis corroborabuntur.

92. Ad hoc igitur demonstrandum in subsidium vocemu
integrationem, qua est

$$\int \frac{\partial \varphi}{\alpha + \beta \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}} \mathrm{A} \cos \frac{\alpha \cos \varphi + \beta}{\alpha + \beta \cos \varphi}.$$

Fiat nunc $\alpha = 1 + bb$ et $\beta = -2b$ et habebimus

$$\int \frac{\partial \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \frac{1}{1 - bb} \mathrm{A} \cos \frac{(1 + bb) \cos \varphi - 2b}{1 - 2b \cos \varphi + bb},$$

quod integrale iam evanescit posito $\varphi = 0$. Posito ergo pro
$\varphi = \pi$ hoc integrale evadet $\frac{\pi}{1 - bb}$.

93. Quoniam igitur pro nostris terminis integrationis inve

$$\int \frac{\partial \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \frac{\pi}{1 - bb}$$

atque manifesto est

$$\int \partial \varphi = \pi \quad \text{ideoque} \quad \int \frac{\partial \varphi (1 - 2b \cos \varphi + bb)}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \pi,$$

hanc formam in duas partes distribuendo habebimus

$$\pi = (1 + bb) \int \frac{\partial \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} - 2b \int \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + b}$$

unde colligimus

$$\int \frac{\partial \varphi \cos \varphi}{1 - 2b \cos \varphi + bb} = \frac{\pi b}{1 - bb}.$$

94. Quoniam pro nostris terminis integrationis in genere e

$$\int \partial \varphi \cos i\varphi = 0,$$

siquidem i fuerit numerus integer, multiplicemus hanc formul
infra per $1 + bb - 2b \cos \varphi$ atque obtinebimus

$$\int \frac{\partial \varphi ((1 + bb) \cos i\varphi - b \cos (i - 1)\varphi - b \cos (i + 1)\varphi)}{1 + bb - 2b \cos \varphi} = 0.$$

ec forma iam in tres partes secta nobis dabit

$$(1+bb)\int\frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}=b\int\frac{\partial\varphi\cos(i-1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}+b\int\frac{\partial\varphi\cos(i+1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb},$$

de derivamus hanc reductionem generalem:

$$\int\frac{\partial\varphi\cos(i+1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}=\frac{1+bb}{b}\int\frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}-\int\frac{\partial\varphi\cos(i-1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb},$$

ius ope ex integralibus binis pro angulis $i\varphi$ et $(i-1)\varphi$ integrale pro angulo $+1)\varphi$ determinari potest, unde sequentem tabulam conficere licebit:

$$\int\frac{\partial\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi bb}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b^3}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b^4}{1-bb},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b^\lambda}{1-bb},$$

orsus uti supra invenimus.

DEMONSTRATIO
INSIGNIS THEOREMATIS NUMERICI CIRCA UN
POTESTATUM BINOMIALIUM[1]

Conventui exhibita die 17. Septembris 1778

Commentatio 726 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1799/1802), 1806, p. 33—

Summarium ibidem p. 95—96

SUMMARIUM

En développant la puissance p du binome $1+x$, le coëfficient du terme comme tout le monde sait, $\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdots\frac{p-q+1}{q}$. Pour désigner ce coëffi Mr. EULER a introduit dans l'analyse le caractère $\left(\frac{p}{q}\right)$. On sait donc ce que chez lui les caractères

$$\left(\frac{m}{0}\right),\ \left(\frac{m}{1}\right),\ \left(\frac{m}{2}\right),\ \left(\frac{n}{c}\right),\ \left(\frac{n}{c+1}\right),\ \left(\frac{n}{c+2}\right)\ \text{etc.}$$

En faisant usage de ces caractères dans l'acceptation indiquée, le théorème dont ici la démonstration porte que

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right)+\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right)+\text{etc.}=\left(\frac{m+n}{m+c}\right)=\left(\frac{m+n}{n-c}\right).$$

L'immortel auteur avait déjà démontre cette vérité pour les cas où m est un nom positif. Ici, il fait voir que cette égalité a lieu dans tous les cas, et que m et être des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes iam laudatas in nota 1 ad p. minis I16 adiecta. C. B.

1. Si iste character $\left(\frac{p}{q}\right)$ designet coëfficientem potestatis x^q, qui ex evolutione binomii $(1+x)^p$ oritur, ita ut sit

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{p-q+1}{q},$$

iam ita pridem ostendi[1]), summam huiusmodi productorum

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right)+\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right)+\text{etc.}$$

semper hac formula exprimi

$$\left(\frac{m+n}{m+c}\right)=\left(\frac{m+n}{n-c}\right),$$

quandoquidem hi duo characteres sunt inter se aequales, quia in genere est

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{p-q}\right).$$

2. Hoc elegans theorema tum temporis deduxi ex casibus specialibus, quibus erat primo $m=1$, unde fit

$$1\left(\frac{n}{c}\right)+1\left(\frac{n}{c+1}\right)=\left(\frac{1+n}{n-c}\right)=\left(\frac{1+n}{1+c}\right).$$

Deinde sumpto $m=2$ etiam haud difficulter perspicitur esse

$$1\left(\frac{n}{c}\right)+2\left(\frac{n}{c+1}\right)+1\left(\frac{n}{c+2}\right)=\left(\frac{2+n}{2+c}\right).$$

Casu autem $m=3$ habebitur

$$1\left(\frac{n}{c}\right)+3\left(\frac{n}{c+1}\right)+3\left(\frac{n}{c+2}\right)+1\left(\frac{n}{c+3}\right)=\left(\frac{3+n}{3+c}\right).$$

1) Vide Commentationem 575 indicis ENESTROEMIANI conventui academiae Petropolitanae exhibitam die 13. Maii 1776; *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I15, p. 528—568, imprimis p. 550. C. B.

Ex quibus casibus conclusio generalis satis tuto est deducta, ita ut
strationi rigidae aequivalens sit censenda.

3. Interim tamen istud ratiocinium non nisi ad casus, quibus numerus integer positivus, extendi potest, etiamsi veritas multo latius atque adeo ad omnes plane valores litterae m extendi deprehendatur etiamnunc pro hoc theoremate demonstratio completa desideratur, qu veritas pro omnibus casibus, sive litterae m et n denotent numero positivos sive negativos sive integros sive fractos, ostendatur. Talem demonstrationem hic sum traditurus.

LEMMA

4. *Si formula*

$$\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$$

in seriem evolvatur secundum potestates ipsius x procedentem, tum in ha potestatis x^n coëfficiens erit $\binom{n-p+q}{q}$.

Cum enim sit

$$(1-x)^{-q-1} = 1 + \binom{q+1}{1}x + \binom{q+2}{2}xx + \binom{q+3}{3}x^3 + \binom{q+4}{4}x^4 + \text{et}$$

in genere potestatis x^λ coëfficiens erit $\binom{q+\lambda}{\lambda}$, qui ergo etiam erit coëf potestatis $x^{p+\lambda}$ ex evolutione formulae $\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$ resultantis. Fiat nunc $p +$ sive $\lambda = n-p$, atque coëfficiens potestatis x^n erit $= \binom{n-p+q}{n-p} = \binom{n-p}{q}$

5. Hoc lemmate praemisso consideremus hanc expressionem:

$$\frac{z^c}{(1-z)^{c+1}}\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^m = V,$$

qua, cum more solito fiat

$$\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^m = 1+\binom{m}{1}\frac{z}{1-z}+\binom{m}{2}\frac{zz}{(1-z)^2}+\binom{m}{3}\frac{z^3}{(1-z)^3}+\text{etc.},$$

t per seriem

$$V=\frac{z^c}{(1-z)^{c+1}}+\binom{m}{1}\frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}}+\binom{m}{2}\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}}+\binom{m}{3}\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}}+\text{etc.},$$

primo termino praefigi potest character $\binom{m}{0}$. Concipiantur nunc singula mbra huius seriei more solito in series evoluta et ex singulis colligantur mini potestate z^n affecti, atque per lemma praemissum ex primo membro $p=c$ et $q=c$, coëfficiens huius potestatis z^n ipsius erit $=\binom{m}{0}\binom{n}{c}$. Deinde secundo membro, ob $p=c+1$ et $q=c+1$, erit [potestatis] z^n coëfficiens $\binom{n}{c+1}$. Simili modo ex tertio membro nascitur potestatis z^n coëfficiens $\binom{n}{c+2}$ sicque porro. Hinc manifestum est ex tota forma V huius potestatis z efficientem esse prodituram

$$=\binom{m}{0}\binom{n}{c}+\binom{m}{1}\binom{n}{c+1}+\binom{m}{2}\binom{n}{c+2}+\text{etc.},$$

em brevitatis gratia littera C indicemus, haecque est ea ipsa progressio us summa demonstranda est aequari huic characteri $\binom{m+n}{m+c}$.

6. Hoc autem facile ostendetur, si modo observemus esse

$$1+\frac{z}{1-z}=\frac{1}{1-z}.$$

igitur forma nostra erit

$$V=\frac{z^c}{(1-z)^{m+c+1}},$$

cuius evolutione potestatis z^n coëfficiens, ob $p=c$ et $q=m+c$, elicitur

$$=\binom{m+n}{m+c}=\binom{m+n}{n-c}.$$

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right)+\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right)+\text{etc.} =$$

quae est demonstratio maxime rigorosa nostri theorema semper subsistit, quicunque numeri litteris m et n trib

7. Casus hic singularis, quo $m=0$ et potestas $\left(1+\right.$ est in $l\left(1+\frac{z}{1-z}\right)$, peculiarem evolutionem postulat. C

$$V=\frac{z^c}{(1-z)^{c+1}}\,l\left(1+\frac{z}{1-z}\right),$$

ob

$$l\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\frac{z}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{zz}{(1-z)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{(1-z)^3}-$$

erit

$$V=\frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}}-\frac{1}{4}\cdot$$

8. Hinc iam, ut supra fecimus, investigemus coëffic atque ex primo membro is prodit $=\left(\frac{n}{c+1}\right)$; ex secu $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right)$, ex tertio membro $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right)$, ex quarto $-\frac{1}{4}$ sicque totus coëfficiens potestatis z^n ex evolutione expr

$$\left(\frac{n}{c+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{c+4}\right)+\frac{1}{5}\cdot($$

9. Cum vero per transformationem sit

$$l\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=l\,\frac{1}{1-z}=-\,l(1-z),$$

erit quoque

$$V=-\frac{z^c\,l(1-z)}{(1-z)^{c+1}}.$$

uare cum sit

$$-l(1-z) = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 + \text{etc.},$$

it

$$V = \frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+1}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+1}} + \text{etc.},$$

cuius evolutione propterea si quaeratur coëfficiens potestatis z^n, is illi, em modo ante invenimus, aequalis esse debet.

10. Nunc vero per lemma praemissum primum membrum pro hoc coëffi-ente praebet $\left(\frac{n-1}{c}\right)$; secundum membrum autem dat $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right)$, tertium $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right)$ et ita porro, ita ut hinc totus coëfficiens potestatis z^n sit

$$C = \left(\frac{n-1}{c}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n-4}{c}\right) + \text{etc.}$$

11. Hinc igitur adepti sumus sequentem aequationem inter binas pro-essiones inventas, quandoquidem semper erit

$$\left(\frac{n}{c+1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{c+4}\right) + \text{etc.}$$
$$= \left(\frac{n-1}{c}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n-4}{c}\right) + \text{etc.},$$

ae duae progressiones debent esse inter se aequales, quicunque valores eris n et c tribuantur, cuius veritatis nonnullos casus perpendisse iuvabit

CASUS I, QUO $c = 0$

12. Hoc ergo casu prior series evadet

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{3}\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n}{5}\right) - \text{etc.},$$

$$\binom{n-1}{0} + \frac{1}{2}\cdot\binom{n-2}{0} + \frac{1}{3}\cdot\binom{n-3}{0} + \frac{1}{4}\cdot\binom{n-4}{0} + \frac{1}{5}\cdot\binom{n-5}{0}\cdot$$

Ubi notandum est, omnium harum formularum $\binom{n-\lambda}{0}$ valorem quamdiu λ non excedit n, hancque adeo seriem tantum usque ad $\binom{n-n}{0}$ esse continuandam, hocque modo posterior series ita est repra

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

13. Hinc ergo nacti sumus sequentem aequationem maxime me

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\cdot\binom{n}{3} - \frac{1}{4}\cdot\binom{n}{4} + \frac{1}{5}\cdot\binom{n}{5} - \cdots + \frac{1}{n}\cdot\binom{n}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n},$$

cuius veritatem aliquot exemplis ostendamus.

14. Sit 1°. $n = 1$; fiet prior series $\binom{1}{1} = 1$, altera vero pariter

2°. Sit $n = 2$; et, ob $\binom{n}{1} = 2$ et $\binom{n}{2} = 1$, erit prior series $= 2$ - posterior vero series dat $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3°. Sit $n = 3$; ob $\binom{n}{1} = 3$, $\binom{n}{2} = 3$ et $\binom{n}{3} = 1$ prior series dat $3 - \frac{3}{2}$ posterior vero series praebet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

4°. Si $n = 4$, ob $\binom{n}{1} = 4$, $\binom{n}{2} = 6$, $\binom{n}{3} = 4$ et $\binom{n}{4} = 1$ prior se $4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; altera vero series dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ valor est aequalis, ob $1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

5°. Si $n=5$, ob $\binom{n}{1}=5$, $\binom{n}{2}=10$, $\binom{n}{3}=10$, $\binom{n}{4}=5$ et $\binom{n}{5}=1$ erit or series $5-\frac{10}{2}+\frac{10}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{5}$; posterior vero dat $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, valores calculo instituto accurate evadunt aequales.

Simili modo erit quoque

$$6-\frac{15}{2}+\frac{20}{3}-\frac{15}{4}+\frac{6}{5}-\frac{1}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$$

m erit

$$7-\frac{21}{2}+\frac{35}{3}-\frac{35}{4}+\frac{21}{5}-\frac{7}{6}+\frac{1}{7}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7};$$

gulis enim terminis subtractis remanet

$$6-11+11\tfrac{1}{3}-9+4-1\tfrac{1}{3}=0.$$

CASUS II, QUO $c=1$

15. Hoc casu erit prior series

$$\binom{n}{2}-\frac{1}{2}\binom{n}{3}+\frac{1}{3}\binom{n}{4}-\frac{1}{4}\binom{n}{5}+\frac{1}{5}\binom{n}{6}-\text{etc.};$$

era vero fit

$$\binom{n-1}{1}+\frac{1}{2}\binom{n-2}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-3}{1}+\frac{1}{4}\binom{n-4}{1}+\text{etc.},$$

ae in has duas resolvitur

$$\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}+\text{etc.},$$

$$-1-1-1-1-1-\text{etc.},$$

ae eo usque sunt continuandae, quoad superiores termini unitate fiant mi-res; huic ergo expressioni prior series semper erit aequalis.

16. Sit 1° $n=1$; ac prior series tota evanescit, quod etiam in posteriore nit.

2°. Sit $n = 2$; ac prior series dat 1, posterior vero dat $1 + ($

3°. Si $n = 3$, prior series dat $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$, posterior vero ser

4°. Si $n = 4$, prior series praebet $6 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}$, posterior vero se

5°. Si $n = 5$, prior series dat $10 - \frac{10}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$, posterio
$4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$.

CASUS III, QUO $c = 2$

17. Hoc ergo casu prior series erit

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{4} + \frac{1}{3}\binom{n}{5} - \frac{1}{4}\binom{n}{6} + \frac{1}{5}\binom{n}{7} - \text{etc.},$$

posterior vero series praebet

$$\binom{n-1}{2} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{2} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{2} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{2} + \text{etc.}$$

Hic iam, quamdiu $n < 3$, omnes termini prioris seriei abeunt in nih
etiam in altera usu venire deprehenditur. Tantum autem hic unic
quo $n = 6$, evolvamus; quo casu prior series evadit $20 - \frac{15}{2} + \frac{6}{3} -$
vero series dat $10 + \frac{6}{2} + \frac{3}{3} + \frac{1}{4}$.

NOTA

18. In serie posteriore, quae erat

$$\binom{n-1}{c} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{c} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{c} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{c} + \text{etc.},$$

dubium videri potest, quod ea tantum usque ad terminum $\frac{1}{n}\binom{n-n}{c}$
debeat, cum tamen sequentes termini, in quibus superior numeru
tivus, non evanescant. Verum hic observandum est in his charact
merum inferiorem immediate ex analysi ortum conversum esse in
plementum, siquidem ex forma generali $\frac{z^p}{(1-z)^{q+1}}$ coëfficiens ipsius z
est $\binom{n-p+q}{n-p}$, cuius loco scripsimus $\binom{n-p+q}{q}$ vi aequationis $\left(\frac{a}{b}\right) = ($

probe observandum est talem conversionem non valere, nisi superior numerus fuerit positivus, quemadmodum hactenus assumsimus; unde si etiam ad numeros negativos nostras progressiones extendere velimus, in serie saltem posteriori in singulis characteribus complementa inferiorum numerorum scribi debebunt, hocque modo posterior progressio ita est repraesentanda:

$$\binom{n-1}{n-1-c} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{n-2-c} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{n-3-c} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{n-4-c} + \text{etc.}$$

Hic probe notetur omnes terminos, ubi inferiores numeri sunt negativi, pro nihilo esse habendos. Ita postremo casu, quo erat $n=6$ et $c=2$, haec progressio erit

$$\binom{5}{3} + \frac{1}{2}\binom{4}{2} + \frac{1}{3}\binom{3}{1} + \frac{1}{4}\binom{2}{0} + \frac{1}{5}\binom{1}{-1} + \text{etc.}$$

Hic ergo omnes termini post $\binom{2}{0}$ sequentes evanescunt. Hoc autem observato etiam nostras expressiones ad valores negativos ipsius c extendere licebit.

CASUS IV, QUO $c = -1$

19. Hoc ergo casu prior progressio erit

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \frac{1}{4}\binom{n}{3} + \frac{1}{5}\binom{n}{4} - \text{etc.},$$

altera vero progressio nunc ita se habebit

$$\binom{n-1}{n} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{n+1} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{n+2} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{n+3} + \frac{1}{5}\binom{n-5}{n+4} + \text{etc.},$$

cuius seriei priores termini omnes evanescunt, donec superiores numeri evadunt negativi; tum vero sequentium terminorum ii tantum significatum habent, in quibus numerus inferior adhuc est positivus vel 0; generatim enim omnes isti characteres, simul ac numeri inferiores evadunt negativi, semper evanescunt.

20. Hinc ergo intelligitur, ex progressione posteriore unicum
relinqui, qui erit $\frac{1}{n+1}\binom{-1}{0}$, cuius valor est $+\frac{1}{n+1}$, cui ergo progr
semper est aequalis.

1°. Si enim ponamus $n=1$, prior progressio dat $1-\frac{1}{2}$, pos
dat etiam $\frac{1}{2}$.

2°. Si $n=2$, prior series dat $1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, posterior vero et

3°. Si $n=3$, erit $1-\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Similique modo porro habebitur

$$1-\frac{4}{2}+\frac{6}{3}-\frac{4}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5},$$

$$1-\frac{5}{2}+\frac{10}{3}-\frac{10}{4}+\frac{5}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

etc.

CASUS V, QUO $c=-2$

21. Prior progressio erit

$$\binom{n}{-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{0}+\frac{1}{3}\binom{n}{1}-\frac{1}{4}\binom{n}{2}+\frac{1}{5}\binom{n}{3}-\text{etc.},$$

ubi primus terminus evanescit; posterior vero series erit

$$\binom{n-1}{n+1}+\frac{1}{2}\binom{n-2}{n}+\frac{1}{3}\binom{n-3}{n-1}+\frac{1}{4}\binom{n-4}{n-2}+\text{etc.},$$

cuius terminus generalis est $\frac{1}{\lambda}\binom{n-\lambda}{n-\lambda+2}$. Hic igitur ab initio om
evanescent, donec fiat $\lambda=n+1$, unde terminus fit $\frac{1}{n+1}\binom{-1}{1}=$,
sequitur terminus $\frac{1}{n+2}\binom{-2}{0}$, qui adhuc valorem dat $\frac{1}{n+2}$; seque
omnes iterum evanescunt, ita ut tota posterior series contrahatur
terminos:

$$-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)},$$

qui ergo est valor seriei prioris.

$$\frac{1}{2}\binom{1}{0} - \frac{1}{3}\binom{1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

°. Si $n = 2$, habebitur

$$\frac{1}{2}\binom{2}{0} - \frac{1}{3}\binom{2}{1} + \frac{1}{4}\binom{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3\cdot 4}.$$

°. Si $n = 3$, erit

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = \frac{1}{4\cdot 5}.$$

[CASUS VI, QUO $e = -3$]

3. Hic ergo prior progressio erit

$$\binom{n}{-2} - \frac{1}{2}\binom{n}{-1} + \frac{1}{3}\binom{n}{0} - \frac{1}{4}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \frac{1}{6}\binom{n}{3} + \text{etc.},$$

ubi priores termini in nihilum abeunt. Pro posteriore vero serie, cuius terminus generalis est $\frac{1}{\lambda}\binom{n-\lambda}{n-\lambda+3}$, primus terminus significatum habens est $\frac{1}{n+1}\binom{-1}{2} = \frac{1}{n+1}$; sequens autem terminus erit $\frac{1}{n+2}\binom{-2}{1} = \frac{-2}{n+2}$; denuo sequens $\frac{1}{n+3}\binom{-3}{0} = \frac{1}{n+3}$; reliqui vero omnes evanescunt, ita ut summa prioris seriei futura sit

$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

4. Ut rem exemplis illustremus, sit

°. $n = 0$, quo casu summa debet[1]) esse $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3}$, ipsa vero progressio $\frac{1}{3}\binom{0}{0} = \frac{1}{3}$.

1) Editio princeps: dabit. C. B.

2°. Casu $n=1$ fit summa $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{12}$, ipsa vero progress
$\frac{1}{3}\binom{1}{0}-\frac{1}{4}\binom{1}{1}=\frac{1}{12}$.

3°. Casu $n=2$ fit summa $\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{30}$, ipsa autem prog
$\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$.

Eodem modo habebimus

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{2}{4\cdot 5\cdot 6},$$

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{4}+\frac{6}{5}-\frac{4}{6}+\frac{1}{7}=\frac{2}{5\cdot 6\cdot 7},$$

$$\frac{1}{3}-\frac{5}{4}+\frac{10}{5}-\frac{10}{6}+\frac{5}{7}-\frac{1}{8}=\frac{2}{6\cdot 7\cdot 8}.$$

25. Superfluum foret haec ulterius prosequi. Hinc enim sati fuerit $c=-4$, posteriorem progressionem, atque adeo summam turam esse

$$\frac{-1}{n+1}+\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n+4}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

Prior vero series omissis terminis nihilo aequalibus erit

$$-\frac{1}{4}\binom{n}{0}+\frac{1}{5}\binom{n}{1}-\frac{1}{6}\binom{n}{2}+\frac{1}{7}\binom{n}{3}-\frac{1}{8}\binom{n}{4}+\text{etc.}$$

DE SUMMATIONE SERIERUM IN HAC FORMA CONTENTARUM[1]

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\text{etc.}$$

Conventui exhibita die 31. Maii 1779

Commentatio 736 indicis ENESTRÖMIANI

émoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, p. 26–42

. Ex iis, quae olim primus de summatione potestatum reciprocarum in m attuli[2], duo tantum casus derivari possunt, quibus summam seriei opositam assignare licet: alter scilicet, quo $a=1$, ubi ostendi huius seriei

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

um esse $=\frac{\pi\pi}{6}$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $=1$; vero casus est, quo $a=-1$; tum enim mutatis signis huius seriei

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\text{etc.}$$

) Confer hac cum dissertatione Commentationes 20, 41, 61, 63, 130, 597; LEONHARDI EULERI *mnia*, vol. I14 et I15. C. B.

) Vide Commentationes 41, 61, modo laudatas; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, vol. I14, s p. 80 et 152. C. B.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{9\cdot 2^3}+\frac{1}{16\cdot 2^4}+\text{etc.}$$

summam esse $=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2$ denotante $l2$ logarithmum hyper
qui est 0,693147180. Neque vero praeter hos casus ullus alius
quo summam assignare liceat.

2. Methodus autem, qua hunc postremum casum sum ad
extendi potest, ita ut inde plurimae insignes relationes inter
series huius formae reperiri queant. Innititur autem ista methodu

LEMMA

Si ponatur

$$p=\int\frac{\partial x}{x}ly \quad et \quad q=\int\frac{\partial y}{y}lx,$$

erit summa

$$p+q=lx\cdot ly+C,$$

siquidem constans ita definiatur, ut unico casui satisfaciat.

Hinc igitur sequentia problemata percurramus pro varia scil
inter x et y.

PROBLEMA 1

Si fuerit $x+y=1$, *binas illas formulas*

$$p=\int\frac{dx}{x}ly \quad et \quad q=\int\frac{dy}{y}lx$$

in series resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p+q=lx\cdot ly+C.$$

1) Vide Commentationem 20, ibidem, imprimis p. 40. C. B.

3. Cum igitur sit $y = 1 - x$, erit

$$ly = -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \text{etc.}$$

uo

$$p = \int \frac{\partial x}{x}\, ly = -\frac{x}{1} - \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} - \text{etc.}$$

quo modo ob

$$x = 1 - y \quad \text{et} \quad lx = -y - \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \text{etc.}$$

$$q = \int \frac{\partial y}{y}\, lx = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} - \text{etc.},$$

obrem harum duarum serierum summa erit $lx \cdot ly + C$. Pro constante C enda consideremus casum, quo $x = 0$ et $y = 1$ ideoque $lx \cdot ly = 0$; tum erit

$$p + q = -1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \text{etc.} = -\frac{\pi\pi}{6},$$

nditur $C = -\frac{\pi\pi}{6}$.

4. Quoties ergo fuerit $x + y = 1$, summa harum duarum serierum iunctim erum

$$\frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots + \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

$= \frac{\pi\pi}{6} - lx \cdot ly$; hincque statim sequitur tertius casus supra memoratus. enim $x = \frac{1}{2}$ erit quoque $y = \frac{1}{2}$ ideoque ambae hae series inter se les [evadunt], unde sequitur fore

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\left(l\,\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2.$$

$$A = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \text{etc.} \quad \text{et} \quad B = \frac{b}{1} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} + \text{etc.},$$

semper erit $A + B = \frac{\pi\pi}{6} - la \cdot lb$. Hinc ergo, si alterius harum seriorum aliunde esset cognita, etiam alterius summa innotesceret. Hocque es ipsum problema, quod iam olim tractavi.

PROBLEMA 2

Si fuerit $x - y = 1$, binas illas formulas

$$p = \int \frac{dx}{x} ly \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dy}{y} lx$$

in series resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p + q = lx \cdot ly + C.$$

SOLUTIO

5. Cum hic sit $y = x - 1$, erit

$$ly = l(x-1) = lx + l\left(1 - \frac{1}{x}\right) = lx - \frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc.}$$

hincque

$$p = \int \frac{\partial x}{x} ly = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.}$$

Deinde ob $x = 1 + y$ erit

$$lx = \frac{y}{1} - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \text{etc.}$$

ideoque

$$q = \int \frac{\partial y}{y} lx = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

...nstante determinanda consideremus casum $y = 0$, quo fit $x = 1$ et ... $= 0$; tum igitur erit

$$p = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} \quad \text{et} \quad q = 0,$$

...obtinetur constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$.

Hic igitur iterum duas habemus series, quarum coniunctim summam ...re valemus:

$$\left.\begin{aligned} &\ldots + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.} \\ &\ldots \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(lx)^2 + lx \cdot ly = \frac{\pi\pi}{6} + lx \cdot l\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Quodsi ergo habeantur hae duae series:

$$A = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \text{etc.},$$

$$B = \frac{b}{1} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} - \frac{b^4}{16} + \text{etc.},$$

...sit $a = \frac{1}{x}$ et $b = y$, atque inter a et b haec datur relatio

$$ab + a = 1,$$

$$A + B = \frac{\pi\pi}{6} - la \cdot lb\sqrt{a}.$$

...eremus casum, quo

$$b = a\left(= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ob } ab + a = 1\right),$$

quocirca, existente $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, huius seriei

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \text{etc.}$$

summa erit

$$\frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} la \cdot la\sqrt{a}.$$

8. Deinde etiam hic notatu dignus est casus, quo $b = -a$ atc
hoc enim casu erit

$$\frac{\pi\pi}{6} = la \cdot lb\sqrt{a}.$$

At quia $b = -a$, erit

$$-aa + a = 1$$

hincque

$$a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Iam cum sit

$$lb\sqrt{a} = \frac{1}{2} labb,$$

ob

$$bb = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

erit $abb = -1$, unde sequitur fore

$$\frac{\pi\pi}{6} = l\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot l\sqrt{-1},$$

id quod egregie convenit cum expressione cognita peripheriae
logarithmos imaginarios.

9. Si poneremus hic $a = \frac{1}{2}$, foret $b = 1$ ideoque

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

prodiret tertius casus initio memoratus.

Si vero faciamus hic $b = \frac{1}{2}$, eritque $a = \frac{2}{3}$ et

$$lb\sqrt{a} = \frac{1}{2}\, lbba = \frac{1}{2}\, l\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\, l6 \quad \text{et} \quad la = -l\frac{3}{2},$$

habebimus

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{4\cdot 3^2} + \frac{2^3}{9\cdot 3^3} + \text{etc.} \\ + B &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\, l\frac{3}{2}\cdot l6.$$

habemus hinc ex problemate primo hanc aequationem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.} \\ + &\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{4\cdot 3^2} + \frac{2^3}{9\cdot 3^3} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - l3\cdot l\frac{3}{2}$$

nobit.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.} \\ - &\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{4\cdot 3^2} - \frac{1}{9\cdot 3^3} - \frac{1}{16\cdot 3^4} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} = l3\cdot l\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\, l\frac{3}{2}\cdot l6 = \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2.$$

nacti sumus hanc aequationem notatu dignam:

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.},$$

tio peripheriae π penitus e calculo excessit. Verum eadem relatio ti modo facilius eruitur.

10. Manente evolutione prioris partis p, altera

$$lx = l(1+y) = ly + l\left(1 + \frac{1}{y}\right.$$

hinc

$$lx = ly + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \text{et}$$

erit

$$q = \int \frac{\partial y}{y}(lx) = \frac{1}{2}(ly)^2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{9y^3} +$$

Nunc igitur erit

$$p + q = lx \cdot ly + C;$$

ubi constans C inde definiri potest, quod posito y

$$p = -\frac{1}{2}(l2)^2 + \frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{2}(l2)^2 - \frac{\pi\pi}{12}$$

et

$$q = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \text{etc.},$$

quibus valoribus substitutis pro hoc casu prodit p
quocirca $C = 0$.

11. Verum haec constans etiam alio modo defini
vitatis gratia

$$X = \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{et}$$

et

$$Y = -\frac{1}{y} - \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{9y^3} - \frac{1}{16y^4} + \text{etc}$$

ut habeamus

$$p = \frac{1}{2}(lx)^2 + X \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}(ly)^2$$

hincque fiet

$$p + q = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{2}(ly)^2 + X + Y = lx$$

deduximus

$$Y - X = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{2}(ly)^2 - lx\cdot ly + C = \frac{1}{2}\left(l\frac{x}{y}\right)^2 + C,$$

otandum est esse $y = x + 1$. Iam ad constantem C definiendam con-
tur casus $x = \infty$, quo fit $X = 0$ et $Y = 0$, praeterea vero $l\frac{x}{y} = 0$,
, notatis erit $0 = C$ ideoque $C = 0$.

2. Hinc igitur nacti sumus duas series X et Y, quarum differentia per logarithmos exprimitur, cum sit

$$Y - X = \frac{1}{2}\left(l\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(l\frac{y+1}{y}\right)^2$$

$= y + 1$. Ex hac forma sumto $y = 2$ statim fluit relatio ante inventa

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{16\cdot 3^4} + \text{etc.}$$

autem modo nunc multo generalius habebimus

$$\frac{1}{1\cdot y} - \frac{1}{4\cdot y^2} + \frac{1}{9\cdot y^3} - \frac{1}{16\cdot y^4} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}\left(l\frac{y+1}{y}\right)^2 + \frac{1}{1(y+1)} + \frac{1}{4(y+1)^2} + \frac{1}{9(y+1)^3} + \text{etc.},$$

uo y quicquid lubuerit accipere licet.

PROBLEMA 3

Si inter x et y haec detur relatio: $xy + x + y = c$, binas formulas

$$p = \int \frac{\partial x}{x}\, ly \quad et \quad q = \int \frac{\partial y}{y}\, lx$$

ies resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p + q = lx\cdot ly + C.$$

13. Hinc igitur primo erit

$$y = \frac{c - x}{1 + x},$$

cuius logarithmus per duas series sequentes exprimitur:

$$ly = \begin{cases} lc - \dfrac{x}{c} - \dfrac{x^2}{2c^2} - \dfrac{x^3}{3c^3} - \dfrac{x^4}{4c^4} - \text{etc.} \\ -x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + \text{etc.}, \end{cases}$$

unde fit

$$p = \int \frac{\partial x}{x} ly = \begin{cases} lc \cdot lx - \dfrac{x}{c} - \dfrac{x^2}{4c^2} - \dfrac{x^3}{9c^3} - \dfrac{x^4}{16c^4} - \text{et} \\ \qquad - x + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^4}{16} - \text{et} \end{cases}$$

Simili modo, cum sit $x = \frac{c - y}{1 + y}$, erit

$$q = \int \frac{\partial y}{y} lx = \begin{cases} lc \cdot ly - \dfrac{y}{c} - \dfrac{y^2}{4c^2} - \dfrac{y^3}{9c^3} - \dfrac{y^4}{16c^4} - \text{et} \\ \qquad - \dfrac{y}{1} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{y^3}{9} + \dfrac{y^4}{16} - \text{et} \end{cases}$$

Atque hinc erit $p + q = lx \cdot ly + C$.

14. Pro constante definienda consideremus casum, quo $p = lc \cdot lx$ et

$$\left. \begin{aligned} q = (lc)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \text{etc.} \\ - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

sive

$$q = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.},$$

e aequatio nostra evadit

$$p+q=lc\cdot lx+(lc)^2-\frac{\pi\pi}{6}-\frac{c}{1}+\frac{c^2}{4}-\frac{c^3}{9}+\text{etc.}=lc\cdot lx+C,$$

ergo termini $lc\cdot lx$ se mutuo destruunt, ita ut sit

$$C=(lc)^2-\frac{\pi\pi}{6}-\frac{c}{1}+\frac{c^2}{4}-\frac{c^3}{9}+\text{etc.}$$

15. Hic ergo quinque occurrunt series infinitae, quas sequenti modo in-
emus:

$$\frac{c}{1}-\frac{c^2}{4}+\frac{c^3}{9}-\frac{c^4}{16}+\text{etc.}=O,$$

$$\frac{x}{c}+\frac{x^2}{4\cdot c^2}+\frac{x^3}{9\cdot c^3}+\frac{x^4}{16\cdot c^4}+\text{etc.}=P,$$

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+\text{etc.}=Q,$$

$$\frac{y}{c}+\frac{y^2}{4\cdot c^2}+\frac{y^3}{9\cdot c^3}+\frac{y^4}{16\cdot c^4}+\text{etc.}=R,$$

$$\frac{y}{1}-\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{9}-\frac{y^4}{16}+\text{etc.}=S;$$

bus litteris introductis nostra aequatio erit

$$lc\cdot lx-P-Q+lc\cdot ly-R-S=lx\cdot ly+(lc)^2-\frac{\pi\pi}{6}-O,$$

de sequitur fore

$$O-P-Q-R-S=lx\cdot ly+(lc)^2-lc\cdot lx-lc\cdot ly-\frac{\pi\pi}{6},$$

ae expressio contrahitur in sequentem:

$$O-P-Q-R-S=l\frac{x}{c}\cdot l\frac{y}{c}-\frac{\pi\pi}{6}$$

e mutatis signis

$$P+Q+R+S-O=\frac{\pi\pi}{6}-l\frac{x}{c}\cdot l\frac{y}{c}.$$

et

$$R + S = \frac{2y}{1} + \frac{2y^3}{9} + \frac{2y^5}{25} + \text{etc.},$$

tum vero

$$\Theta = \frac{\pi\pi}{12},$$

sicque inter binas series satis simplicem relationem sumus ass

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \frac{x^7}{49} + \text{etc.} \\ &+\frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \frac{y^7}{49} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} lx \cdot ly,$$

ubi notandum est fore

$$xy + x + y = 1, \quad \text{hinc sive} \quad y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{sive} \quad x = \ldots$$

cuius aliquot exempla evolvisse iuvabit.

17. 1°. Si $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$, unde sequitur aequatio

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \frac{1}{49\cdot 2^7} + \text{etc.} \\ &+\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \frac{1}{49\cdot 3^7} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l2$$

2°. Si $x = \frac{1}{4}$, erit $y = \frac{3}{5}$ ideoque

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{9\cdot 4^3} + \frac{1}{25\cdot 4^5} + \frac{1}{49\cdot 4^7} + \text{etc.} \\ &+\frac{3}{1\cdot 5} + \frac{3^3}{9\cdot 5^3} + \frac{3^5}{25\cdot 5^5} + \frac{3^7}{49\cdot 5^7} + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l4 \cdot$$

. Quin etiam datur casus, quo $x=y$, quod evenit ponendo

$$x=y=-1+\sqrt{2}=a;$$

gitur fiet

$$\frac{a}{1}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^7}{49}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{16}-\frac{1}{4}(la)^2.$$

. In genere igitur etiam, quicquid fuerit c, operae pretium erit casum doro, quo fit $x=y$, quod evenit si[1])

$$x=y=-1+\sqrt{1+c}=a;$$

gitur erit

$$P=R=\frac{a}{c}+\frac{a^2}{4\cdot c^2}+\frac{a^3}{9\cdot c^3}+\frac{a^4}{16\cdot c^4}+\text{etc.},$$

$$Q=S=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^4}{16}+\text{etc.},$$

leducitur ista aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} \ldots+\frac{a^2}{4\cdot c^2}+\frac{a^3}{9\cdot c^3}+\frac{a^4}{16\cdot c^4}+\text{etc.} \\ \ldots-\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^4}{16}+\text{etc.}\end{array}\right\}=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}\left(l\frac{a}{c}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{1}-\frac{c^2}{4}+\frac{c^3}{9}-\text{etc.}\right).$$

lurimas egregias relationes inter ternas huiusmodi series derivare licet, rgo evadunt rationales, quoties fuerit $1+c$ quadratum.

. Plures alias relationes inter binos numeros x et y evolvere liceret scilicet forma generali contentas:

$$xy\pm\alpha x\pm\beta y=\gamma,$$

utem posito $x=\beta t$ et $y=\alpha u$ in hanc simpliciorem mutatur:

$$tu\pm t\pm u=\frac{\gamma}{\alpha\beta},$$

---

1) Editio princeps: $x=y=-\frac{1+\sqrt{1+c}}{2}=a$. Correxit C. B.

modi series definitur, quos igitur in sequentibus theoremat

THEOREMA 1

20. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + etc.$$

et

$$Y = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + etc.$$

fueritque $x + y = 1$, *tum semper erit*

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - lx \cdot ly,$$

cuius theorematis demonstratio in § 4 iam est tradita.

COROLLARIUM I

21. Hic ante omnia manifestum est summas harum
non posse, simulac vel x vel y unitatem superaverit.
casibus videtur in infinitum excrescere; verum ea fit ad
ob y negativum, logarithmus y imaginarius evadat.

COROLLARIUM II

22. Usus huius theorematis potissimum iis casibus
parum ab unitate deficit ideoque prior series X parum c
altera Y eo magis converget. Veluti si fuerit $x = \frac{9}{10}$, er

$$X = \frac{9}{10} + \frac{9^2}{4 \cdot 10^2} + \frac{9^3}{9 \cdot 10^3} + \frac{9^4}{16 \cdot 10^4} + etc$$

series vix convergens, cuius tamen summa per nostrum theorema facil proxime assignari poterit. Cum enim sit

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{4\cdot 10^2} + \frac{1}{9\cdot 10^3} + \frac{1}{16\cdot 10^4} + \text{etc.},$$

quae series est maxime convergens, erit utique

$$X = \frac{\pi\pi}{6} - l10 \cdot l\frac{10}{9} - Y.$$

COROLLARIUM III

23. Ita in genere, si statuamus $x = \frac{m}{m+n}$ et $y = \frac{n}{m+n}$, erit

$$X = \frac{m}{1(m+n)} + \frac{m^2}{4(m+n)^2} + \frac{m^3}{9(m+n)^3} + \text{etc.}$$

et

$$Y = \frac{n}{1(m+n)} + \frac{n^2}{4(m+n)^2} + \frac{n^3}{9(m+n)^3} + \text{etc.};$$

tum igitur erit

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - l\frac{m+n}{m} \cdot l\frac{m+n}{n}.$$

THEOREMA II

24. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{1}{x} - \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \mathit{etc.},$$

$$Y = \frac{1}{y} + \frac{1}{4yy} + \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} + \mathit{etc.}$$

existente

$$y = x + 1,$$

cuius demonstratio colligitur ex § 12, dummodo litte
mutantur.

COROLLARIUM I

25. Quia hic est $y = x + 1$, posterior series, Y, n
prior X. Quin etiam, si prior series, X, fuerit adeo d
quando x est fractio unitate minor, posterior nihilominu
Veluti si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{3}{2}$; ipsae vero series er

$$X = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \frac{2^5}{25} -$$

et

$$Y = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \frac{2^4}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.};$$

consequenter erit

$$X - Y = \frac{1}{2}(l3)^2.$$

Quia vero posterior series, Y, parum convergit, eam 1
hoc modo reducimus:

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} - l3 \cdot l\frac{3}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 3}$$

hincque habebimus hanc summationem:

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2}(l3)^2 + \frac{\pi\pi}{6} - l3 \cdot l\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \right.$$

COROLLARIUM II

26. Sumamus nunc in genere $x = \frac{1}{n}$, ut sit series su

$$X = \frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc.},$$

vero ob $y = \frac{1+n}{n}$ altera series erit

$$Y = \frac{n}{n+1} + \frac{nn}{4(n+1)^2} + \frac{n^3}{9(n+1)^3} + \text{etc.}$$

que

$$X = \frac{1}{2}(l(n+1))^2 + Y.$$

vero per theorema I est

$$Y = \frac{\pi\pi}{6} - l(n+1) \cdot l\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{1}{9(n+1)^3} - \text{etc.},$$

valore substituto erit

$$\frac{1}{2}(l(n+1))^2 + \frac{\pi\pi}{6} - l(n+1) \cdot l\frac{n+1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc.}\right),$$

expressio contrahitur in hanc:

$$\frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2} l(n+1) \cdot l\frac{nn}{n+1} + \frac{\pi\pi}{6} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc.}\right).$$

THEOREMA III

27. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + etc.$$

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + etc.,$$

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2.$$

loco x scribendo $\frac{1}{x}$ erit

$$Y = \int \frac{\partial x}{x} l \frac{x}{1+x}$$

sive

$$Y = -\int \frac{\partial x}{x} l(1+x) + \int \frac{\partial x}{x} lx$$

hincque addendo

$$X + Y = \int \frac{\partial x}{x} lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C,$$

ubi constans ex casu $x = 1$ facillime definitur. Quia enim ho
X quam $Y = \frac{\pi\pi}{12}$, erit constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$ ideoque

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2.$$

COROLLARIUM I

28. Quodsi ergo pro x numerus quantumvis magnus accipia
theorematis summa seriei X, quae maxime est divergens, facilli
cum reducatur ad seriem Y, quae eo magis est convergens, qu
divergit.

COROLLARIUM II

29. Nunc vero ope theorematis secundi series

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \text{etc.}$$

reducitur ad hanc formam:

$$Y = \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.}\right),$$

e expressio cum superiori § 26 egregie convenit, quia est

$$\frac{1}{2}l(x+1)\cdot l\frac{xx}{x+1} = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2,$$

evolventi facile patebit.

THEOREMA IV

30. *Si habeantur hae series:*

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + etc. \quad et \quad Y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + etc.$$

ente

$$xy + x + y = 1$$

$$x = \frac{1-y}{1+y} \quad vel \quad y = \frac{1-x}{1+x},$$

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}lx\cdot ly.$$

onstratio manifesta est ex § 16.

COROLLARIUM 1

31. Hic iterum, ut supra, observandum est summas harum serierum fieri ginarias, simulac litterae x et y unitatem superaverint. At si fuerit $x < 1$, semper alia series eiusdem formae exhiberi potest, cuius summa ab illa leat. Ita si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$. At si x prope ad unitatem ac-t, veluti $x = \frac{9}{10}$, altera series, Y, maxime converget.

binas huiusmodi series inter se comparare licet. Ad quod
quens theorema speciale subiungamus, quod demum per l
bages sum adeptus, quod autem nunc satis commode ex pr
rematibus deduci potest.

THEOREMA SPECIALE

33. *Si habeantur hae series sibi affines:*

$$A = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + etc.$$

et

$$B = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + etc.,$$

tum erit

$$2A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l3)^2.$$

DEMONSTRATIO

Cum ex theoremate primo, sumto $x = y = \frac{1}{2}$, sit

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

haec series sequenti modo resoluta repraesentari potest:

$$2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \text{etc.}\right) - 1\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \text{etc}\right.$$

Nunc vero per theorema IV, sumto $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, hab
tionem:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}l2\cdot l3 - \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{9\cdot 3^3}$$

nde vero ex theoremate secundo, sumto $x = 2$ et $y = 3$, erit

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.}$$

stituantur iam hi valores loco illarum serierum, ac pro parte sinistr libit

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi\pi}{4} - l2\cdot l3 - 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \\ \quad - \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2.$$

le concludimus fore

$$\left.\begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \\ + 1\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - l2\cdot l3 - \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(l2)^2$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l3)^2 \quad \left(\text{ob } \left(l\frac{3}{2}\right)^2 = (l3)^2 - 2\,l2\cdot l3 + (l2)^2\right).$$

34. Quomodocunque autem theoremata hic data inter se combinentur alia relatio inter binas huiusmodi series elici potest, multo minus autem eiusmodi series simplices eruere licet, quarum summa absolute exhiber at, praeter casus iam indicatos, quos igitur hic coniunctim ob oculos po mus.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6},$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

Praeterea vero adiungi potest adhuc ista series:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}(la$$

existente $a = \sqrt{2} - 1$.

Quanquam autem in hac serie valor ipsius a sit quaevis potestas seorsim evolvi debere videatur, tamen seriem recurrentem constituunt, in qua quilibet terminu dentes definiri potest ope huius formulae:

$$a^{n+4} = 6\,a^{n+2} - a^n,$$

cuius veritas inde elucet, quod sit, per a^n dividendo, $a^4 =$ $a = \sqrt{2} - 1$, erit $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $a^4 = 17 - 12\sqrt{2}$, unde

OBSERVATIONES CIRCA FRACTIONES CONTINUAS IN HAC FORMA CONTENTAS[1]

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

Conventui exhibita die 18. Novembris 1779

Commentatio 742 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 52—74

1. Cum plures adhuc inventae sint methodi ad fractiones continuas d
uiendi earumque vicissim valores assignandi, nulla tamen earum ita c
nparata, cuius ope valores earum fractionum continuarum, quae in h
rma sunt contentae, investigari queant unico casu excepto, quo $n = 1$. M
ni enim a me iam olim[2]) istius formae

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes 71, 123, 522, 553, 593, 616, 745, 750 necn
roductionem in analysin infinitorum, Lausannae 1748, t. I cap. XVIII, LEONHARDI EULERI Ope
ia vol. I_{14} p. 187 et 291; vol. I_{15} p. 314, 400 et 661; vol. I_{16} p. 34; vol. I_{16}^{*} p. 178 et p. 23
I_8 p. 362. C. B.

2) Vide Commentationes supra laudatas 522, 553, 593 voluminis I_{16}, imprimis p. 33
et 686. C. B.

adeo per numeros rationales exprimi queat; quamobrem
super hoc argumento, quae ista summae inveni, plurimum
detur ad hanc doctrinam summi momenti uberius excolend

2. Quo indolem huius formae accuratius perscrutari ha
bus formulis sum complexus:

$$S = \frac{n}{1 + A},$$

$$A = \frac{n+1}{2 + B},$$

$$B = \frac{n+2}{3 + C},$$

$$C = \frac{n+3}{4 + D}$$

etc.,

ex quibus vicissim sequentes derivantur:

$$A = \frac{n}{S} - 1,$$

$$B = \frac{n+1}{A} - 2,$$

$$C = \frac{n+2}{B} - 3,$$

$$D = \frac{n+3}{C} - 4$$

etc.

3. Hinc iam facile patet semper esse

$$S < \frac{n}{1}, \quad A < \frac{n+1}{2}, \quad B < \frac{n+2}{3}, \quad C < \frac{n+3}{4}, \quad e$$

iam in prima formula loco A scribatur valor $\frac{n+1}{2}$, qui est valde , tum fractio $\frac{n}{1+A}$ erit nimis parva ideoque erit

$$S > \frac{n}{1+\frac{n+1}{2}} \quad \text{sive erit} \quad S > \frac{2n}{n+3}.$$

modo circa sequentes formulas ratiocinando fiet:

$$A > \frac{n+1}{2+\frac{n+2}{3}} \quad \text{sive} \quad A > \frac{3(n+1)}{n+8},$$

$$B > \frac{n+2}{3+\frac{n+3}{4}} \quad \text{sive} \quad B > \frac{4(n+2)}{n+15},$$

$$C > \frac{n+3}{4+\frac{n+4}{5}} \quad \text{sive} \quad C > \frac{5(n+3)}{n+24},$$

$$D > \frac{n+4}{5+\frac{n+5}{6}} \quad \text{sive} \quad D > \frac{6(n+4)}{n+35}$$

etc.

iet autem has formulas conspectui clarius exponi.

Tabula I		Tabula II	
$S = \frac{n}{1+A}$	$A = \frac{n}{S} - 1$	$S < \frac{n}{1}$	$S > \frac{2n}{n+3}$
$A = \frac{n+1}{2+B}$	$B = \frac{n+1}{A} - 2$	$A < \frac{n+1}{2}$	$A > \frac{3(n+1)}{n+8}$
$B = \frac{n+2}{3+C}$	$C = \frac{n+2}{B} - 3$	$B < \frac{n+2}{3}$	$B > \frac{4(n+2)}{n+15}$
$C = \frac{n+3}{4+D}$	$D = \frac{n+3}{C} - 4$	$C < \frac{n+3}{4}$	$C > \frac{5(n+3)}{n+24}$
$D = \frac{n+4}{5+E}$	$E = \frac{n+4}{D} - 5$	$D < \frac{n+4}{5}$	$D > \frac{6(n+4)}{n+35}$
$E = \frac{n+5}{6+F}$	$F = \frac{n+5}{E} - 6$	$E < \frac{n+5}{6}$	$E > \frac{7(n+5)}{n+48}$
$F = \frac{n+6}{7+G}$	$G = \frac{n+6}{F} - 7$	$F < \frac{n+6}{7}$	$F > \frac{8(n+6)}{n+63}$

que eorum aliquis extra limites in secunda tabula assignatos cadat, erit signum valorem assumtum esse falsum ideoque vel nimis m[agnum vel] nimis parvum; hocque modo plures pro S valores fingendo contin[uo] ad verum valorem accedere licebit. His igitur observationibus [...] quosdam casus simpliciores evolvendos.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 2$ IDEOQUE

$$S = \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{6}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

5. Pro hoc igitur casu limites erunt

$$S < \frac{2}{1} \quad \text{et} \quad S > \frac{4}{5},$$

$$A < \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad A > \frac{9}{10},$$

$$B < \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad B > \frac{16}{17},$$

$$C < \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad C > \frac{25}{26},$$

$$D < \frac{6}{5} \quad \text{et} \quad D > \frac{36}{37}$$

etc.

Sumamus igitur $S = 1$ atque, si inde sequentium litterarum valo[res ...]cantur, reperiemus

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1 \text{ etc.},$$

qui valores cum omnes infra assignatos limites cadant, id certum est [...] valorem assumtum $S = 1$ veritati esse consentaneum, quod quidem fa[...] ipsa forma perspicere licuisset.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 3$ ET

$$S = \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{7}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

6. Hoc ergo casu limites nostri erunt

$$S < \frac{3}{1}, \quad S > 1,$$

$$A < 2, \quad A > \frac{12}{11},$$

$$B < \frac{5}{3}, \quad B > \frac{20}{18},$$

$$C < \frac{6}{4}, \quad C > \frac{30}{27},$$

$$D < \frac{7}{5}, \quad D > \frac{42}{38}$$

etc.

Hinc iam statim patet non esse $S = 2$; foret enim $A = \frac{1}{2}$, quod exe[...] Sumto $S = \frac{3}{2}$ fit $A = 1$, qui valor etiam extra limites cadit. Sumatur [...] $S = \frac{4}{3}$ et prodibit $A = \frac{5}{4}$, qui valor iam infra limites cadit; hinc er[...] $B = \frac{6}{5}$, $C = \frac{7}{6}$, $D = \frac{8}{7}$, $E = \frac{9}{8}$, $F = \frac{10}{9}$ etc., qui valores cum omne[...] limites praescriptos cadunt, hoc certum est signum huius fractionis co[...] propositae verum valorem esse $S = \frac{4}{3}$.

7. Commodo hic usu venit, ut omnes valores litterarum S, A, [...] D etc. manifesto ordine se insequantur, scilicet $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$ etc., [...]

diit progressio arithmetica, cuius differentiae primae sunt consta
concludere licet etiam pro reliquis casibus eiusmodi valores pro
A, B, C, D etc. prodire debere, qui differentiis continuo sumendis
differentias evanescentes perducant. Hoc observato relinquamus ip
valorem indefinitum indeque computemus valores sequentium litter

$$A=\frac{3-S}{S},\quad B=\frac{6S-6}{3-S},\quad C=\frac{33-23S}{6S-6},\quad D=\frac{128S-168}{33-23S}$$

Iam termini harum fractionum, scilicet denominatores, in hac ser
diuntur:

$$1,\quad S,\quad 3-S,\quad 6S-6,\quad 33-23S,\quad 128S-168\quad \text{etc.}$$

Hinc erunt

Differentiae primae $\quad S-1,\ 3-2S,\ 7S-9,\ 39-29S,\ 151S$

Differentiae secundae $\quad 4-3S,\ 9S-12,\ 48-36S,\ 180S$

Differentiae tertiae $\quad 12S-16,\ 60-45S,\ 216S$

Hic statim patet differentias primas non evanescere, quia ex iis nihi
prodirent diversi valores pro S sequentes 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{39}{29}$ etc. At ver
rentiae secundae nihilo aequentur, omnes praebent $S=\frac{4}{3}$, quem e
lorem differentiae tertiae et sequentes nihilo aequatae producunt, s
esse possumus revera fore $S=\frac{4}{3}$.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n=4$ ET

$$S=\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{2+\cfrac{6}{3+\cfrac{7}{4+\text{etc.}}}}}$$

8. Hic statim adhibeamus methodum modo ante expositam et
indefinito S colligimus valores litterarum A, B, C, D etc., qui eru

$$A = \frac{4 - S}{S}, \quad B = \frac{7S - 8}{4 - S}, \quad C = \frac{48 - 27S}{7S - 8}, \quad D = \frac{157S - 248}{48 - 27S},$$

$$E = \frac{1624 - 1001S}{157S - 248} \quad \text{etc.}$$

tum termini harum formularum in seriem disponantur et continuo diffe-
capiantur, ut sequitur:

	1,	S,	$4 -$	S,	$7S -$	8,	$48 -$	$27S$,	$157S -$	248
D. I.	$S -$	1,	$4 -$	$2S$,	$8S -$	12,	$56 -$	$34S$,	$184S -$	296
D. II.			$5 -$	$3S$,	$10S -$	16,	$68 -$	$42S$,	$218S -$	352
D. III.					$13S -$	21,	$84 -$	$52S$,	$260S -$	420
D. IV.							$105 -$	$65S$,	$312S -$	504

etc.

Hic statim perspicuum est neque differentias primas neque secundas satisfacere, quin ex iis nihilo aequatis diversi valores pro S essent pr ut vero differentiae tertiae omnes dant $S = \frac{21}{13}$, qui ergo pro vero valo tionis continuae propositae est habendus.

9. Quo autem de hoc certiores reddamur, exploremus istum valo per methodum primo indicatam ex eoque computemus sequentes valo secundae columnae primae tabulae sumendo $n = 4$, ut sequitur:

$$A = \frac{31}{21}, \quad B = \frac{43}{31}, \quad C = \frac{57}{43}, \quad D = \frac{73}{57}, \quad E = \frac{91}{73} \quad \text{etc.},$$

qui valores omnes intra limites in tabula secunda datos cadere deprehen Praeterea vero egregium ordinem progressionis inter se servant, cum termini crescant secundum differentias 8, 10, 12, 14, 16 etc., quae binario continuo crescunt; cum contra quilibet alii valores pro S assu valores absurdos deducerent, qui mox extra limites praescriptos extravaga

$$S = \cfrac{}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \cfrac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

10. Applicemus hic etiam methodum ante usitatam, a
quentes valores:

$$A = \frac{5 - S}{S}, \quad B = \frac{8S - 10}{5 - S}, \quad C = \frac{65 - 31S}{8S - 10}, \quad D = \frac{18}{6}$$

$$E = \frac{2285 - 1219S}{188S - 340} \quad \text{etc.}$$

Iam termini harum fractionum in seriem disponantur et diff
sumantur hoc modo:

	$1, \; S,$	$5 - S,$	$8S - 10,$	$65 - 31S,$	$188S - 340,$	
D. I.	$S - 1,$	$5 - 2S,$	$9S - 15,$	$75 - 39S,$	$219S - 405,$	
D. II.		$6 - 3S,$	$11S - 20,$	$90 - 48S,$	$258S - 480,$	
D. III.			$14S - 26,$	$110 - 59S,$	$306S - 570,$	
D. IV.				$136 - 73S,$	$365S - 680,$	

etc.

11. Hinc differentiae tertiae nondum negotium conficiu
rentur diversi valores pro S; at ex differentiis quartis omn
valor $S = \frac{136}{73}$, qui ergo est verus valor fractionis continuae
dum primam methodum explorare velimus, egregie cum lin
convenire deprehendetur. Casus autem iam evoluti in ordin

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$S = 1$	$S = \frac{4}{3}$	$S = \frac{21}{13}$	$S = \frac{136}{73}$

METHODUS SECUNDA
SUMMAS EARUM SERIERUM CONTINUARUM INVESTIGANDI

43. Quoniam vidimus valores litterarum S, A, B, C, D etc. semper secundum certam quandam legem uniformem progredi, dum litterae A, B, C, D etc. valores exprimunt similium fractionum continuarum vel uno vel duobus vel tribus etc. membris truncatarum[1], cum sit

$$A = \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}, \quad B = \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \cfrac{n+4}{5 + \text{etc.}}}}, \quad C = \cfrac{n+3}{4 + \cfrac{n+4}{5 + \cfrac{n+5}{6 + \text{etc.}}}} \quad \text{etc.},$$

nullum est dubium, quin etiam nostra formula proposita retro continuata eandem legem uniformem sit secutura. Sin autem nostra forma uno gradu retro continuetur, prodibit $\frac{n-1}{0+S}$, quam vocemus $= \alpha$, ita ut sit

$$\alpha = \frac{n-1}{S}.$$

Si duobus gradibus retro continuemus, erit

$$\frac{n-2}{-1+\alpha} = \beta.$$

Simili modo ultra retrogrediamur, nanciscemur has formulas:

$$\frac{n-3}{-2+\beta} = \gamma, \quad \frac{n-4}{-3+\gamma} = \delta, \quad \frac{n-5}{-4+\delta} = \varepsilon, \quad \frac{n-6}{-5+\varepsilon} = \zeta \quad \text{etc.}$$

1) Editio princeps: *truncatas*. C. B.

similem legem uniformitatis continuam deprehendi debere. Retro i, formulae continuentur, donec perveniatur ad numeratorem $= 0$, habebitur talis forma:

$$\cfrac{0}{-\lambda + \cfrac{1}{-\lambda + 1 + \cfrac{2}{-\lambda + 2 + \cfrac{3}{-\lambda + 3 + \text{etc.}}}}}$$

quae autem expressio, etiamsi numerator est $= 0$, ideo non ipsa ev est censenda, quia evenire potest, ut etiam denominator evanescat hoc revera usu venit in nostris formis, quas sumus perscrutaturi; igitur erit

$$0 = -\lambda + \cfrac{1}{-\lambda + 1 + \cfrac{2}{-\lambda + 2 + \cfrac{3}{-\lambda + 3 + \text{etc.}}}}$$

quae ergo fractio continua si continuetur usque ad ipsam forma positam S, inde elici poterit valor ipsius S, id quod pro singulis ostendemus.

14. Sit igitur $n = 2$, et forma fractionis continuae retro continu

$$-1 + \frac{1}{0 - S},$$

quae ergo nihilo aequata dabit $S = 1$, ut ante invenimus. Pro casu orietur haec aequatio:

$$0 = -2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{2}{0 + S}}$$

unde fit

$$2 = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{2}{S}}$$

ideoque $S = \frac{4}{3}$, ut ante. Pro casu $n = 4$ habebimus

$$0 = -3 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{2}{-1 + \cfrac{3}{0 + S}}}$$

unde fit $S = \frac{21}{13}$. Hic autem calculus expeditius instituetur, si litter
introductis α, β, γ utamur; tum enim erit $0 = -3 + \gamma$. Erat autem

$$\alpha = \frac{3}{S}, \quad \beta = \frac{2}{-1 + \alpha}, \quad \gamma = \frac{1}{-2 + \beta}.$$

Hic ergo erit

$$\gamma = 3 \quad \text{ideoque} \quad 3 = \frac{1}{-2 + \beta},$$

unde fit

$$\beta = \frac{7}{3} = \frac{2}{-1 + \alpha}$$

hincque colligitur

$$\alpha = \frac{13}{7} = \frac{3}{S},$$

sicque tandem erit $S = \frac{21}{13}$. Hoc ergo artificio etiam in sequentibus

15. Quo has operationes pro maioribus numeris n sublevemus,
mulis pro litteris α, β, γ, δ etc. ante assumtis derivemus reciprocas,
quaelibet littera per praecedentem definiatur, quas utrasque formulas
quenti tabella exhibeamus:

$$\beta = \frac{n-2}{-1+\alpha} \qquad \alpha = 1 + \frac{n-2}{\beta}$$

$$\gamma = \frac{n-3}{-2+\beta} \qquad \beta = 2 + \frac{n-3}{\gamma}$$

$$\delta = \frac{n-4}{-3+\gamma} \qquad \gamma = 3 + \frac{n-4}{\delta}$$

$$\varepsilon = \frac{n-5}{-4+\delta} \qquad \delta = 4 + \frac{n-5}{\varepsilon}$$

$$\zeta = \frac{n-6}{-5+\varepsilon} \qquad \varepsilon = 5 + \frac{n-6}{\zeta}$$

$$\zeta = 6 + \frac{n-7}{\eta}$$

16. Iam beneficio huius tabulae facile erit omnes casus
Ac primo quidem sumto $n = 1$, quo casu fit

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

videtur fieri $S = 0$, cum tamen supra invenimus esse $S = \frac{1}{e-1}$.
notetur istam conclusionem non valere, si etiam fuerit $\alpha = 0$,
$S = 0 + \frac{0}{0}$. Nihil vero repugnat, quominus sit $\frac{0}{0} = \frac{1}{e-1}$, qu
hoc casu locum habet.

Progrediamur ergo ad reliquos casus; ac sumto $n = 2$, ub

$$S = \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \text{etc.}}}$$

quia hic β non est $= 0$, manifesto erit $\alpha = 1$ hincque $S = 1$,
invenimus.

Sit iam $n=3$ ideoque

$$S=\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{2+\cfrac{5}{3+\text{etc.}}}}$$

erit $\beta=2$, quia non est $\gamma=0$; hinc ergo regrediendo erit

$$\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad S=\frac{4}{3}.$$

Sumto porro $n=4$, quo casu erit

$$S=\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{2+\cfrac{6}{3+\text{etc.}}}}$$

erit $\gamma=3$, unde oriuntur sequentes valores:

$$\beta=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},$$

$$\alpha=1+\frac{2\cdot 3}{7}=\frac{13}{7}$$

et

$$S=\frac{21}{13}.$$

Sit $n=5$, quo casu fit

$$S=\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{2+\cfrac{7}{3+\cfrac{8}{4+\text{etc.}}}}}$$

tum erit $\delta=4$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\gamma=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4},$$

$$\beta=2+\frac{2\cdot 4}{13}=\frac{34}{13},$$

$$\alpha=1+\frac{3\cdot 13}{34}=\frac{73}{34}$$

et

$$S=0+\frac{4\cdot 34}{73}=\frac{136}{73}.$$

17. Nunc ulterius progrediamur ac ponamus $n = 6$, q

$$S = \cfrac{6}{1 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

eritque $\varepsilon = 5$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\delta = 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5},$$

$$\gamma = 3 + \frac{2 \cdot 5}{21} = \frac{73}{21},$$

$$\beta = 2 + \frac{3 \cdot 21}{73} = \frac{209}{73},$$

$$\alpha = 1 + \frac{4 \cdot 73}{209} = \frac{501}{209},$$

$$S = 0 + \frac{5 \cdot 209}{501} = \frac{1045}{501}.$$

18. Sit nunc $n = 7$ et

$$S = \cfrac{7}{1 + \cfrac{8}{2 + \cfrac{9}{3 + \cfrac{10}{4 + \text{etc.}}}}}$$

erit $\zeta = 6$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\varepsilon = 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6},$$

$$\delta = 4 + \frac{2 \cdot 6}{31} = \frac{136}{31},$$

$$\gamma = 3 + \frac{3 \cdot 31}{136} = \frac{501}{136},$$

$$\beta = 2 + \frac{4 \cdot 136}{501} = \frac{1046}{501},$$

$$\alpha = 1 + \frac{5 \cdot 501}{1546} = \frac{4051}{1546},$$

$$S = 0 + \frac{6 \cdot 1546}{4051} = \frac{9276}{4051}.$$

19. Sit nunc $n = 8$ et

$$S = \cfrac{8}{1 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{10}{3 + \text{etc.}}}}$$

tum erit $\eta = 7$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\zeta = 6 + \frac{1}{7} = \frac{43}{7},$$

$$\varepsilon = 5 + \frac{2 \cdot 7}{43} = \frac{229}{43},$$

$$\delta = 4 + \frac{3 \cdot 43}{229} = \frac{1045}{229},$$

$$\gamma = 3 + \frac{4 \cdot 229}{1045} = \frac{4051}{1045},$$

$$\beta = 2 + \frac{5 \cdot 1045}{4051} = \frac{13327}{4051},$$

$$\alpha = 1 + \frac{6 \cdot 4051}{13327} = \frac{37633}{13327},$$

$$S = 0 + \frac{7 \cdot 13327}{37633} = \frac{93289}{37633}.$$

20. Hos iam valores pro littera S inventos in ordinem disponamus eorum progressio facilius considerari possit, quos ergo sequenti modo re sentemus:

n	2	3	4	5	6	7	8	etc.
S	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{136}{73}$	$\frac{1045}{501}$	$\frac{9276}{4051}$	$\frac{93289}{37633}$	etc.

Inter has autem fractiones primo intuitu nulla certa lex regnare vi verum re attentius perpensa haud difficulter quandam progressionis observare licet. Si enim quemlibet numeratorem cum summa numerato

$$21 = 3\ (4 + 3) = 3 \cdot$$

$$136 = 4\ (21 + 13) = 4 \cdot 3$$

$$1045 = 5\ (136 + 73) = 5 \cdot 20$$

$$9276 = 6(1045 + 501) = 6 \cdot 154$$

$$93289 = 7(9276 + 4051) = 7 \cdot 13327$$

etc.

Pro denominatoribus autem haud absimilis relatio
libet sit summa praecedentis numeratoris certo multip
qui ordo sequenti modo in oculos incurret:

$$3 = 1 + 2 \cdot 1 = 1 +$$

$$13 = 4 + 3 \cdot 3 = 4 +$$

$$73 = 21 + 4 \cdot 13 = 21 +$$

$$501 = 136 + 5 \cdot 73 = 136 +$$

$$4051 = 1045 + 6 \cdot 501 = 1045 + 30$$

$$37633 = 9276 + 7 \cdot 4051 = 9276 + 28$$

etc.

21. Hinc ergo, si pro quolibet numero n inventa

$$S = \frac{p}{q},$$

pro sequente numero, $n + 1$, fiet

$$S = \frac{n(p+q)}{p+nq},$$

cuius formulae ope ex quolibet casu sequens multo exp
quam per praecedentem methodum. Ita cum pro casu
valor

$$S = \frac{93289}{37633},$$

sequente casu $n = 9$ erit

$$S = \frac{8(93289 + 37633)}{93289 + 8 \cdot 37633} = \frac{1047376}{394353}.$$

m quia haec eximia regula hactenus sola inductione innititur, eius demonionem in sequente articulo dabimus. Ante autem quam hoc argumentum amus, observasse iuvabit posteriorem columnam tabulae (§ 15) datae insignem novam proprietatem suppeditare. Si enim loco litterarum γ etc. earum valores successive substituamus, pro S novam fractionem nuam nanciscemur, quae ita se habet:

$$S = \cfrac{n-1}{1 + \cfrac{n-2}{2 + \cfrac{n-3}{3 + \cfrac{n-4}{4 + \cfrac{n-5}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

forma semper abrumpitur, unde operae pretium erit hanc transformam in sequenti theoremate ante oculos posuisse.

THEOREMA

22. *Si fuerit*

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \mathit{etc.}}}}}$$

etiam semper

$$S = \cfrac{n-1}{1 + \cfrac{n-2}{2 + \cfrac{n-3}{3 + \cfrac{n-4}{4 + \cfrac{n-5}{5 + \mathit{etc.}}}}}}$$

dem n fuerit numerus integer positivus, excepta unitate ob rationem supra tam.

23. Si evolutiones casuum ante tractatorum contemplen
mus in fractionibus pro litteris α, β, γ etc. datis inverso
numeratorem dare denominatorem sequentis; quamobrem omnes
disponamus ac differentias tam primas quam secundas et se
mus. Ita pro casu $n = 3$ termini harum fractionum ab u
erunt sequentes:

	1,	2,	3,	4,
D. I.	1,	1,	1.	

Simili modo pro $n = 4$ habebimus hos terminos:

	1,	3,	7,	13,	21,
D. I.	2,	4,	6,	8,	
D. II.	2,	2,	2.		

Casus vero $n = 5$ praebet sequens schema:

	1,	4,	13,	34,	73,	136,
D. I.	3,	9,	21,	39,	63,	
D. II.	6,	12,	18,	24,		
D. III.	6,	6,	6.			

Casus porro $n = 6$ dat sequens schema:

	1,	5,	21,	73,	209,	501,	1045,
D. I.	4,	16,	52,	136,	292,	544,	
D. II.	12,	36,	84,	156,	252,		
D. III.	24,	48,	72,	96,			
D. IV.	24,	24,	24.				

casu $n = 7$ habebimus

	1,		6,		31,		136,		501,		1546,		4051,		9276,
D. I.		5,		25,		105,		365,		1045,		2505,		5225,	
D. II.			20,		80,		260,		680,		1460,		2720,		
D. III.				60,		180,		420,		780,		1260,			
D. IV.					120,		240,		360,		480,				
D. V.						120,		120,		120.					

s denique $n = 8$ dat sequens schema:

	1,		7,		43,		229,		1045,		4051,		13327,		37633,		93289,
D. I.		6,		36,		186,		816,		3006,		9276,		24306,		55656,	
D. II.			30,		150,		630,		2190,		6270,		15030,		31350,		
D. III.				120,		480,		1560,		4080,		8760,		16320,			
D. IV.					360,		1080,		2520,		4680,		7560,				
D. V.						720,		1440,		2160,		2880,					
D. VI.							720,		720,		720.						

24. Consideratio horum casuum nobis sequentes conclusiones suppeditat:

1°. Quia omnes hi casus tandem ad differentias constantes perducunt, discimus omnes istas series esse algebraicas, quarum scilicet terminus ralis algebraice exhiberi queat.

2°. Porro etiam videmus differentias constantes constituere progressionem rgeometricam, scilicet

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720 \text{ etc.}$$

3°. Constat autem terminos generales cuiusque progressionis ex terminis is singularum differentiarum formari, qui ergo termini primi se habent equens tabella indicat:

$$n = 5 \quad 1, \quad 3, \quad 6, \quad 6,$$

$$n = 6 \quad 1, \quad 4, \quad 12, \quad 24, \quad 24,$$

$$n = 7 \quad 1, \quad 5, \quad 20, \quad 60, \quad 120, \quad 120,$$

$$n = 8 \quad 1, \quad 6, \quad 30, \quad 120, \quad 360, \quad 720, \quad 720,$$

etc.

Evidens autem est hanc postremam seriem hoc modo repr

$$1, \quad 6, \quad 6 \cdot 5, \quad 6 \cdot 5 \cdot 4, \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3, \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2,$$

4°. Cum ista progressio referatur ad casum $n = 8$, hi licet in genere terminos primos tam ipsius seriei quam ipsa hanc constituturos esse progressionem:

$$1, \quad n - 2, \quad (n-2)(n-3), \quad (n-2)(n-3)(n$$

5°. Deinde vero ex doctrina progressionum constat te cuiusque seriei reperiri, si, manente termino ipsius seriei differentiarum terminus primus multiplicetur per x, secun rentiarum per $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$, tertiarum per $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ et ita por generalis pro nostro casu hoc modo exprimetur:

$$1 + (n-2)x + (n-2)(n-3)\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + (n-2)(n-3)(n-4)\frac{x(}{}$$

unde sumto $x = 1$ oritur terminus secundus $n - 1$; at si numeri 2, 3, 4 etc., orientur termini tertius, quartus, quin autem haec pro singulis casibus evolvere.

25. Hinc ergo si fuerit $n = 2$, terminus generalis erit terminus generalis erit $1 + x$. Hoc autem casu ipsa seri ubi patet sumto $x = 3$ prodire terminum ultimum 4, qui

divisus dat valorem ipsius $S=\frac{4}{3}$. Sumatur nunc $n=4$; et seriei 1, 3
21 erit terminus generalis

$$=1+2x+x(x-1)=1+x+xx,$$

unde sumto $x=4$ prodit terminus ultimus $=21$, qui per praeceden
divisus dat $S=\frac{21}{13}$. Sit nunc $n=5$; et progressionis 1, 4, 13, 34,
terminus generalis erit

$$1+3x+3\cdot 2\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+3\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

unde sumto $x=5$ oritur ultimus terminus 136, qui per penultimum
dat valorem ipsius S. Simili modo sumto $n=6$, seriei 1, 5, 21, 73, 2
1045 terminus generalis erit

$$1+4x+4\cdot 3\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+4\cdot 3\cdot 2\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot}$$

qui posito $x=6$ praebet terminum ultimum at posito $x=5$ penul
quorum ille per hunc divisus praebet valorem ipsius S.

26. Quoniam autem hic tantum agitur de termino ultimo et pe
horum terminorum formam pro casu $n=6$ accuratius perpendamus.
igitur $x=5$ erit terminus penultimus

$$1+4\cdot 5+4\cdot 3\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}+4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};$$

at sumto $x=6$ habebitur terminus ultimus

$$1+4\cdot 6+4\cdot 3\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};$$

unde, si pro hoc casu ponatur $S=\frac{p}{q}$ et denominatores ad priores
referantur, erit

$$p=1+4\cdot 6+6\cdot 6\cdot 5+4\cdot 6\cdot 5\cdot 4+1\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3.$$

ubi evidens est coëfficientes priores ex potestate quarta binom

27. In omnibus igitur casibus optime successu coëfficien bus uti poterimus et, quoniam pro valore generali n coëfficien $n-2$ sunt desumendi, meminisse iuvabit me olim[1] hos coëffi modo expressisse:

$$\left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right], \quad \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right], \quad \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix}\right], \quad \left[\begin{matrix} n-2 \\ 4 \end{matrix}\right] \quad \text{etc.}$$

Si ponamus, ut hactenus, $S = \frac{p}{q}$, erit

$$p = 1 + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right] n + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right] n(n-1) + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix}\right] n(n-1)$$

$$+ \left[\begin{matrix} n-2 \\ 4 \end{matrix}\right] n(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

et

$$q = 1 + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right] (n-1) + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right] (n-1)(n-2)$$

$$+ \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix}\right] (n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

Ita si fuerit $n = 7$, erit hinc

$$p = 1 + 5 \cdot 7 + 10 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot$$

et

$$q = 1 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot$$

Tales igitur expressiones ad quosvis casus facile applicantur.

1) Confer Commentationem 575; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I 15, Notandum est singulas Commentationes in designandi modo inter se differre. V p. 3 voluminis I 15 adiectam. C. B.

28. Quodsi iam istae formulae pro p et q inventae accuratius perpen-ur et cum sequente casu $n+1$, pro quo sit $S=\frac{p'}{q'}$ ideoque

$$=1+\left[\frac{n-1}{1}\right](n+1)+\left[\frac{n-1}{2}\right](n+1)n+\left[\frac{n-1}{3}\right](n+1)n(n-1)+\text{etc.}$$

$$q'=1+\left[\frac{n-1}{1}\right]n+\left[\frac{n-1}{2}\right]n(n-1)+\left[\frac{n-1}{3}\right]n(n-1)(n-2)+\text{etc.}$$

parentur, haud difficulter inde deduci poterit insignis illa relatio, quam ante [§ 21] in medium attulimus, scilicet semper esse

$$p'=np+nq$$

$$q'=p+nq,$$

proprietas eo magis est notatu digna, quod eius ope ex quolibet casu ens facillime derivari potest, quemadmodum iam in praecedente articulo ostensum.

DE SERIE MAXIME MEMORABILI Q
BINOMIALIS QUAECUNQUE EXPR

Conventui exhibita die 20. Decembris 177

Commentatio 743 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (18

1. Memini me olim vidisse seriem prorsus sin
binomiali $(1+x)^n$, quae abrumpebatur pro casibus,
tam numerus integer positivus quam negativus. Quia
amplius recordabar, eam sequenti modo sum perscru
abrumpi debet, sive n fuerit numerus integer positiv
sub hac forma repraesento:

$$(1+x)^n = A + nB + n(n-1)C + (n+1)$$

$$+ (n+1)n(n-1)(n-2)E + (n+2)\cdots(n-2)F + (n$$

2. Hac forma generali constituta litteras A, B
minemus, ut casibus, quibus pro n numerus integer si
tivus assumitur, satisfiat; unde casus simpliciores sequen

Si $n = 0$, erit $1 = A$,

Si $n = 1$, erit $1+x = A + B$,

Si $n = -1$, erit $\frac{1}{1+x} = A - B + 2C$,

Si $n = 2$, erit $(1+x)^2 = A + 2B + 2C + 6D$,

Si $n = -2$, erit $\frac{1}{(1+x)^2} = A - 2B + 6C - 6D +$

Si $n = 3$, erit $(1+x)^3 = A + 3B + 6C + 24D + 24E + 120F$,

Si $n = -3$, erit $\frac{1}{(1+x)^3} = A - 3B + 12C - 24D + 120E - 120F + 720$

Si $n = 4$, erit $(1+x)^4 = A + 4B + 12C + 60D + 120E + 720F + 720$
$+ 5040H$,

Si $n = -4$, erit $\frac{1}{(1+x)^4} = A - 4B + 20C - 60D + 360E - 720F + 5040$
$- 5040H + 40320I$

etc.

3. Iam resolutio harum aequationum pro litteris A, B, C, D etc.
quentes nobis praebet valores:

$$\begin{aligned}
&1. & A &= 1,\\
&2. & B &= x,\\
&3. & 2C &= \frac{xx}{1+x},\\
&4. & 6D &= \frac{x^3}{1+x},\\
&5. & 24E &= \frac{x^4}{(1+x)^2},\\
&6. & 120F &= \frac{x^5}{(1+x)^2},\\
&7. & 720G &= \frac{x^6}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

etc.

4. Lex, qua hi valores ordine progrediuntur, satis est manifesta,
quilibet terminus prodit, si praecedens vel per x vel per $\frac{x}{1+x}$ multiplice
Quo observato series quaesita sequenti forma expressa reperietur:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n = 1 &+ \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{xx}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{1+x}\\
&+ \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}\frac{x^5}{(1+x)^2}\\
&+ \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6}\frac{x^6}{(1+x)^3} + \text{etc.};
\end{aligned}$$

et distinguamus terminos ordine pares ab imparibus, ut seriem
obtineamus, eritque

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4} z^4 + \frac{(n+2)\cdots(n-}{1\cdots 6} \\ + x\left(n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} z^2 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5} z^4 + e\right. \end{cases}$$

atque ob insignem ordinem, quo termini utriusque seriei procedu
tuto concludere licet, eas esse veritati consentaneas. Quoniam v
per solam inductionem est conclusa, utique rigidiore demonstra
quam iam sum investigaturus.

5. Interim tamen statim casus memorabilis se offert, quo
seriei egregie confirmatur, scilicet si exponens n statuatur infi
simul vero x infinite parvum, ita tamen ut productum nx sit qu
puta u; tum enim constat esse

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u.$$

Hoc autem casu series inventa sequentem induet formam:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

quae series, ut cuique constat, veritati est consentanea.

6. Ut autem in demonstrationem completam inquiramus, q

$$\frac{xx}{1+x} = zz,$$

$$x = \frac{zz + z\sqrt{zz + 4}}{2}.$$

hanc fractionem tollendam statuamus $z = 2y$, ut fiat

$$x = 2yy + 2y\sqrt{yy + 1},$$

cque fit

$$1 + x = 1 + 2yy + 2y\sqrt{yy + 1} = (y + \sqrt{1 + yy})^2,$$

ut potestas nostra proposita evadat

$$(y + \sqrt{1 + yy})^{2n}.$$

a igitur ista formula $y + \sqrt{1 + yy}$ frequentissime occurret, brevitatis gratia amus

$$y + \sqrt{1 + yy} = v,$$

potestas evolvenda sit v^{2n}.

7. Cum igitur ista potestas v^{2n} aequetur binis seriebus supra exhibitis, priore statuamus

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} zz + \frac{(n+1) \cdots (n-2)}{1 \cdots 4} z^4 + \frac{(n+2) \cdots (n-3)}{1 \cdots 6} z^6 + \text{etc.},$$

altera vero statuamus

$$\frac{tx}{z} = nx + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} xz^2 + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5} xz^4 + \text{etc.},$$

fiat

$$t = nz + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \frac{(n+2) \cdots (n-2)}{1 \cdots 5} z^5 + \text{etc.},$$

e series praecedenti magis est assimilata. Hinc igitur habebimus

$$v^{2n} = s + \frac{tx}{z}.$$

$$x = 2yy + 2y\sqrt{1+yy} = 2yv,$$

habebimus

$$\frac{x}{z} = v,$$

et aequatio nostra iam erit

$$v^{2n} = s + tv.$$

Ut nunc hanc aequationem per differentiationem tractemus,

$$\partial v = \partial y + \frac{y\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}}.$$

Vicissim autem y per v ita exprimitur, ut sit

$$y = \frac{vv-1}{2v}$$

hincque porro

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v}.$$

Tum vero differentiando erit

$$\partial y = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv},$$

qui valor egregie convenit cum eo, quem praecedens formu
praeberet, unde fit

$$\partial y = \frac{\partial v}{v}\sqrt{1+yy} = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv}.$$

9. Cum iam potestas nostra v^{2n} aequetur duabus seriob
teram per s alteram per tv denotavimus, notasse hic iuvabit
s, complecti terminos rationales, alteram vero terminos omne
rationales. Hoc observato aequationis inventae primo sumam
ut habeamus

$$2nlv = l(s+tv),$$

umtis differentialibus erit

$$\frac{2n\partial v}{v}=\frac{\partial s+v\partial t+t\partial v}{s+tv}.$$

autem sit

$$v=y+\sqrt{1+yy}$$

$$\partial v=\frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

hac substitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{2n\partial y}{\sqrt{1+yy}}=\frac{\partial s\sqrt{1+yy}+y\partial t\sqrt{1+yy}+\partial t(1+yy)+ty\partial y+t\partial y\sqrt{1+yy}}{(s+ty+t\sqrt{1+yy})\sqrt{1+yy}},$$

sublatis fractionibus hanc induet formam:

$$2ns\partial y+2nty\partial y+2nt\partial y\sqrt{1+yy}$$

$$=\partial s\sqrt{1+yy}+y\partial t\sqrt{1+yy}+\partial t(1+yy)+ty\partial y+t\partial y\sqrt{1+yy},$$

seorsim aequando partes rationales et irrationales nascuntur hae duae ationes:

$$\text{I.}\quad 2ns\partial y+(2n-1)ty\partial y=\partial t+yy\partial t,$$

$$\text{II.}\quad (2n-1)t\partial y=\partial s+y\partial t.$$

10. Ut harum aequationum prior simplicior reddatur, ab ea subtrahatur erior per y multiplicata, eiusque loco prodibit ista:

$$2ns\partial y=\partial t-y\partial s.$$

a aequatio cum hac combinanda erit

$$(2n-1)t\partial y=\partial s+y\partial t.$$

videamus, an ex his duabus aequationibus pro litteris s et t easdem s derivare queamus, quas supra per inductionem elicuimus. Quoniam

$$(2n-1)t\partial z = 2\partial s + z\partial t,$$
$$2ns\partial z = 2\partial t - z\partial s.$$

11. Possemus nunc ex his duabus aequationibus olimina
quo facto prodiret aequatio differentialis secundi gradus in
haud difficulter series valorem ipsius s exprimens deduci poss
modo eliminata littera s talis aequatio prodiret inter t et
modo series pro t derivari posset; verum multo facilius a
immediate ex binis aequationibus inventis erui poterunt. Pr
littera statim fingamus sequentes series indefinitas:

$$s = 1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + Ez^{10} + \text{etc.},$$
$$t = \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7 + \varepsilon z^9 + \text{etc.}$$

12. Nunc istas series substituamus primo in aequatione

$$(2n-1)t - \frac{z\partial t}{\partial z} - \frac{2\partial s}{\partial z} = 0$$

sequenti modo:

$$\begin{array}{rcllll}
(2n-1)t & = & (2n-1)\alpha z & + (2n-1)\beta z^3 & + (2n-1)\gamma z^5 & + (2n- \\
-\dfrac{z\partial t}{\partial z} & = & -\ \alpha & -\ 3\beta & -\ 5\gamma & - \\
-\dfrac{2\partial s}{\partial z} & = & -\ 4A & -\ 8B & -12C & -
\end{array}$$

Hic iam singulis partibus seorsim ad nihilum redactis obtiner
determinationes:

$$A = \frac{n-1}{2}\alpha, \qquad B = \frac{n-2}{4}\beta, \qquad C = \frac{n-3}{6}\gamma,$$
$$D = \frac{n-4}{8}\delta, \qquad E = \frac{n-5}{10}\varepsilon, \qquad F = \frac{n-6}{12}\zeta$$

etc.

13. Eodem modo tractetur altera aequatio,

$$2ns + \frac{z\partial s}{\partial z} - \frac{2\partial t}{\partial z} = 0,$$

facta substitutione serierum fictarum supra datarum fiet

$$\begin{aligned} 2ns &= \quad 2n + 2nAz^2 + 2nBz^4 + 2nCz^6 + 2nDz^8 + \text{etc.},\\ +\frac{z\partial s}{\partial z} &= \qquad\quad + \; 2A \; + \; 4B \; + \; 6C \; + \; 8D \; + \text{etc.},\\ -\frac{2\partial t}{\partial z} &= -2\alpha - \;\; 6\beta \; - 10\gamma \; - 14\delta \; - 18\varepsilon \; - \text{etc.} \end{aligned}$$

unde ergo fluunt sequentes determinationes:

$$\alpha = n, \qquad \beta = \frac{n+1}{3}A, \qquad \gamma = \frac{n+2}{5}B,$$

$$\delta = \frac{n+3}{7}C, \qquad \varepsilon = \frac{n+4}{9}D, \qquad \zeta = \frac{n+5}{11}E$$

etc.

14. Cum nunc litterarum graecarum prima $\alpha = n$ sit cognita, alternatim superiores determinationes consulendo sequentes valores reperientur:

$$\alpha = n, \qquad A = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\beta = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}, \qquad B = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$\gamma = \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}, \qquad C = \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6},$$

$$\delta = \frac{(n+3)\cdots(n-3)}{1\cdots 7} \qquad D = \frac{(n+3)\cdots(n-4)}{1\cdots 8}$$

etc. etc.

Demonstratum igitur nunc est legem progressionis, quam supra quasi divinando attulimus, cum veritate perfecte consentire.

15. Cum igitur sit

$$(1+x)^n = v^{2n} = s + t\frac{x}{z},$$

quaestio hic omni attentione digna occurrit, quinam prodituri si
pro utraque littera s et t seorsim sumta, quam investigationem i
problemate sum suscepturus.

PROBLEMA

Propositis his duabus seriebus:

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 + etc.,$$

$$t = \frac{n}{1}z + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^5 + etc.$$

investigare utriusque summam.

SOLUTIO

16. Determinatio harum duarum summarum repetenda est
aequationibus differentialibus supra inventis, dum loco z et ∂z s
et $2\partial y$:

$$(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t,$$

$$2ns\partial y = \partial t - y\partial s.$$

Hic quidem iterum posset alterutra litterarum s et t eliminari,
perveniretur ad aequationem differentialem secundi gradus; verum
labore supersedere poterimus. Utamur scilicet tantum aequatione
forma relata:

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial\cdot ty,$$

cum qua combinemus aequationem principalem

$$v^{2n} = s + tv,$$

fit
$$s = v^{2n} - tv$$
que
$$\partial s = 2nv^{2n-1}\partial v - \partial \cdot tv = 2nt\partial y - \partial \cdot ty.$$
vero
$$\partial \cdot tv - \partial \cdot ty = \partial \cdot t(v-y) = \partial \cdot t\sqrt{1+yy}$$

$$v = y + \sqrt{1+yy}.$$
ne habebimus
$$2nv^{2n-1}\partial v = 2nt\partial y + \partial t\sqrt{1+yy} + \frac{ty\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$
aequatio per $\sqrt{1+yy}$ divisa dat
$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1+yy} + 2nt\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1+yy}}.$$
vero est
$$\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{\partial v}{v},$$
atio nostra erit
$$\partial t + \frac{ty\partial y}{1+yy} + 2nt\frac{\partial v}{v} = \frac{2nv^{2n-1}\partial v}{\sqrt{1+yy}},$$
multiplicata per $v^{2n}\sqrt{1+yy}$ reddet membrum sinistrum integrabile, eritque
$$\partial \cdot tv^{2n}\sqrt{1+yy} = 2nv^{4n-1}\partial v.$$
ergo integrale erit
$$tv^{2n}\sqrt{1+yy} = \frac{1}{2}v^{4n} + \frac{C}{2},$$
equenter habebimus
$$t = \frac{v^{2n}+Cv^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

17. Iam pro constante C, quia casu $y=0$ et $v=1$ fieri debet $t=0$, $C=-1$, ita ut sit
$$t = \frac{v^{2n}-v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v},$$

quo substituto reperietur

$$s = \frac{v^{2n} + v^{2-2n}}{vv+1}.$$

Interim tamen etiam videamus, quomodo aequationem differentia memoratam tractari oporteat.

ALIA SOLUTIO
EX DIFFERENTIALIBUS SECUNDI GRADUS PETITA

18. Cum nostrae binae aequationes differentiales sint

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial \cdot ty,$$

$$\partial t = 2ns\partial y + y\partial s,$$

erit ex priore

$$s = 2n\int t\partial y - ty,$$

quibus valoribus in altera substitutis fiet

$$\partial t = 4nn\partial y\int t\partial y - y\partial \cdot ty,$$

quae evoluta dat

$$\partial t = 4nn\partial y\int t\partial y - ty\partial y - yy\partial t.$$

19. Ut hinc signum summatorium tollamus, statuamus

$$\int t\partial y = u,$$

ut sit

$$t = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \partial t = \frac{\partial \partial u}{\partial y},$$

is valoribus substitutis prodit

$$\frac{\partial\partial u}{\partial y}(1+yy)+y\partial u=4nnu\partial y,$$

n aequationem ponendo

$$u=e^{\int p\partial y}$$

$$\partial u=p\partial y e^{\int p\partial y}$$

$$\partial\partial u=(\partial p\partial y+pp\partial y\partial y)e^{\int p\partial y}$$

ifferentialia prima reducere licet; erit enim

$$(\partial p+pp\partial y)(1+yy)+py\partial y=4nn\partial y$$

$$\partial p+pp\partial y+\frac{py\partial y}{1+yy}=4nn\frac{\partial y}{1+yy}.$$

20. Ut nunc primum terminum et tertium in unum contrahamus, ponamus

$$p=\frac{q}{\sqrt{1+yy}},$$

no aequatio

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}}+\frac{qq\partial y}{1+yy}=4nn\frac{\partial y}{1+yy}$$

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}}=\frac{(4nn-qq)\partial y}{1+yy},$$

commode separationem admittit; evidens enim est prodire

$$\frac{\partial q}{4nn-qq}=\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

aequatio per $4n$ multiplicata et integrata dat

$$l\frac{2n+q}{2n-q}=4n\int\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}}=$$

$$\qquad Cv^{4n}+1$$

21. Hinc igitur ob

$$p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$$

erit

$$p\partial y = \frac{q\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{q\partial v}{v}$$

ideoque

$$p\partial y = \frac{2n(Cv^{4n}-1)\partial v}{v(Cv^{4n}+1)},$$

quae expressio resolvitur in has partes:

$$p\partial y = -\frac{2n\partial v}{v} + \frac{4nCv^{4n-1}\partial v}{Cv^{4n}+1},$$

cuius ergo integrale erit

$$\int p\partial y = -2nlv + l(Cv^{4n}+1) + lD$$

consequenter erit

$$e^{\int p\partial y} = \frac{D}{v^{2n}}(1+Cv^{4n}) = Dv^{-2n} + CDv^{+2n}$$

22. Cum igitur sit

$$u = \int t\partial y \quad \text{ideoque} \quad t = \frac{\partial u}{\partial y},$$

per differentiationem mutatis constantibus arbitrariis re

$$t = \frac{Ev^{-2n} + Fv^{+2n}}{\sqrt{1+yy}}.$$

Ad constantes autem definiendas primo notetur posito
debere $t=0$, unde fit

$$F = -E,$$

ut iam sit

$$t = \frac{E}{\sqrt{1+yy}}(v^{-2n} - v^{+2n}).$$

inde vero si y fuerit infinite parvum, fieri debet

$$t = nz = 2ny,$$

n vero evadit

$$v = 1 + y \quad \text{et} \quad v^{-1} = 1 - y$$

eoque

$$v^{2n} = 1 + 2ny \quad \text{et} \quad v^{-2n} = 1 - 2ny,$$

quibus valoribus fiet

$$2ny = -4nEy, \quad \text{ergo} \quad E = -\frac{1}{2},$$

que nanciscimur pro t eundem valorem ac supra invenimus, scilicet

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

quo porro ut ante derivatur

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

SOLUTIO FACILLIMA PROBLEMATIS

23. Hanc solutionem derivabimus ex sola aequatione

$$v^{2n} = s + tv,$$

qua ob

$$v = y + \sqrt{1+yy}$$

tera s complectitur potestates pares ipsius y, t vero impares. Sumto igitur negative littera s manet eadem, littera t vero abibit in $-t$; tum autem co v habebimus

$$-y + \sqrt{1+yy} = v^{-1}.$$

$$v^{-2n} = s - \frac{t}{v},$$

qua aequatione cum principali $v^{2n} = s + tv$ coniuncta, fi

$$v^{2n} - v^{-2n} = tv + \frac{t}{v},$$

unde fit

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

et hinc reperietur

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

Cum enim ex prima aequatione sit

$$t = v^{2n-1} - \frac{s}{v},$$

ex altera vero

$$-t = v^{1-2n} - vs,$$

hi valores invicem coaequati dabunt

$$\frac{s(vv+1)}{v} = v^{2n-1} + v^{1-2n},$$

unde ob

$$\frac{vv+1}{v} = 2\sqrt{1+yy}$$

erit

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

24. Transferamus denique haec omnia ad ipsam pote
cum sit

$$1 + x = vv$$

et

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v} = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}},$$

$$2\sqrt{1+yy} = \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}.$$

ribus substitutis fiet

$$s = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2}\left((1+x)^{n-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}-n}\right),$$

$$t = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2}\left((1+x)^{n} - (1+x)^{-n}\right)$$

$$s = \frac{(1+x)^{n} + (1+x)^{1-n}}{x+2},$$

$$t = \frac{(1+x)^{n+\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}-n}}{x+2}.$$

tera serie deducitur

$$\frac{tx}{z} = t\sqrt{1+x},$$

ur seriei erit

$$\frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^{1-n}}{2+x},$$

umma terminorum ordine parium in serie pro potestate $(1+x)^n$

DE FRACTIONIBUS CONTINUIS W

Conventui exhibuit die 7. Februarii 1780

Commentatio 745 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812)

1. Postquam BROUNCKERUS[2])[3]) memorabilem suam fract
quadratura circuli invenisset eamque sine demonstratione
municasset, hic plurimum studii in eo collocavit, ut fon
KERUS hanc insignem formulam hausisset, detegeret. A
eum usum fuisse egregiis illis formulis, quas ipse in o
tica infinitorum eruerat. Quin etiam inde per calc
strusos non solum BROUNCKERI fractionem continuam, sed i
alias similes elicuit, quae utique, perinde ac BROUNCKERI o
iudicandae, ut oblivioni eripiantur.

2. Quae autem ex WALLISII Arithmetica infinit
ventam Analysin infinitorum in lucem edita, huc perti
quidem recepto ita repraesentari possunt, ut, formulis in
$x = 0$ usque ad $x = 1$ extensis, sequentes quadraturae ex

---

1) Confer hac cum dissertatione praeter *Introductionem in analysin i*
17, 123, 522, 593, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, vol. I8 p. 362; vol.
p. 314 et 661. C. B.

2) Vide notam ad p. 189 vol. I14 adiectam. C. B.

3) Editio princeps hic et passim: BROUNKERUS. C. B.

$$
\begin{array}{lll}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 & = 1, & \\[2ex]
\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2}{3} & = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}, & \\[2ex]
\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} & = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, & \\[2ex]
\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} & = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}, & \\[2ex]
\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} & = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} &
\end{array}
$$

etc.

3. Istas formulas in tertia columna ita adornavi, ut denominatores inter-
ionem manifesto admittant; sicque tantum superest, ut etiam numera-
ita transformentur, ut pariter interpolationem patiantur, id quod fiet,
lis series secundum legem uniformem progrediens, scilicet A, B, C, D,
etc. investigetur, ut sit

$$AB = 1\cdot 1, \quad BC = 2\cdot 2, \quad CD = 3\cdot 3, \quad DE = 4\cdot 4 \text{ etc.},$$

uod est id ipsum, in quo WALLISIUS summam ingenii sagacitatem mani-
vit, quam autem investigationem deinceps multo generalius et calculo
faciliori sum expediturus.

4. Hac autem serie litterarum A, B, C, D etc. inventa totum negotium
us erit confectum. Cum enim sit, uti sequens tabula declarat:

$$
\begin{array}{lll}
\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 & = \frac{1}{A}\cdot\frac{A}{1}, & \\[2ex]
\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{BC}{2\cdot 3} & = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABC}{1\cdot 2\cdot 3}, & \\[2ex]
\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{BCDE}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} & = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABCDE}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, & \\[2ex]
\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{BCDEFG}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} & = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABCDEFG}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} &
\end{array}
$$

etc.,

interpolatio nobis suppeditat sequentes quanti

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot 1,$$

$$\int \frac{xx\,\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{AB}{1 \cdot 2},$$

$$\int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{ABCD}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{ABCDE}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

etc.

5. Cum nunc sit

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$$

denotante π peripheriam circuli, cuius diameter
gratia scribamus $q = \frac{\pi}{2}$, omnes litterarum A, B, (
quantitatem q sequenti modo exprimentur:

			Diff
$A =$	$\frac{1}{q}$	$= 0{,}636620$	
			0,9
$B =$	q	$= 1{,}570796$	
			0,9
$C =$	$\frac{4}{q}$	$= 2{,}546479$	
			0,9
$D =$	$\frac{9q}{4}$	$= 3{,}534292$	
			0,9
$E =$	$\frac{4 \cdot 16}{9q}$	$= 4{,}527074$	
			0,9
$F =$	$\frac{9 \cdot 25}{4 \cdot 16} q$	$= 5{,}522331$	

etc.

6. Hic tertiam adiunxi columnam, quae valor
rarum exhibet, quo clarius appareat, quemadmod

em uniformem increscant, quod non evenisset, si loco q valorem falsum cepissem. His expositis methodum multo faciliorem tradam, qua pro sin-lis his litteris fractiones continuae reperiri possunt, atque eadem opera hanc vestigationem multo generaliorem instituam, dum sequens problema sum soluturus.

PROBLEMA

Invenire seriem litterarum A, B, C, D etc. uniformi lege procedentem, ita sit

$$AB = ff, \quad BC = (f+a)^2, \quad CD = (f+2a)^2 \text{ etc.}$$

SOLUTIO

7. Hinc statim patet, qualis functio fuerit A ipsius f, talem esse debere functionem ipsius $f+a$, tum vero C ipsius $f+2a$, D ipsius $f+3a$ et porro. Hac lege observata si statuamus

$$A = f - \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{A'},$$

ni debebit

$$B = f + \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{B'},$$

i litterae A' et B' eandem inter se rationem tenere debent, ita ut ex A' iatur B', si loco f scribatur $f+a$. Cum igitur fractionibus sublatis sit

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A'} \quad \text{et} \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B'},$$

rum formularum productum ipsi $4ff$ est aequandum, unde oritur haec quatio a fractionibus liberata:

$$aaA'B' - A's(2f-a) - B's(2f+a) - ss = 0.$$

quae commode per factores repraesentari potest ...

$$(A'-2f-a)(B'-2f+a)=4ff.$$

8. Quia nunc, si ambae litterae A' et B' essent aequales[1]), ex foret $A'=B'=4f$, legem supra allatam sequentes statuamus:

$$A'=4f-2a+\frac{s'}{A''}$$

et

$$B'=4f+2a+\frac{s'}{B''},$$

quibus substitutis ultima aequatio induet hanc formam:

$$\left(2f-3a+\frac{s'}{A''}\right)\left(2f+3a+\frac{s'}{B''}\right)=4ff.$$

Facta igitur evolutione et sublatis fractionibus orietur sequens

$$9aaA''B''-A''s'(2f-3a)-B''s'(2f+3a)-s's'=0$$

Sumatur ergo hic $s'=9aa$, ut habeatur ista [aequatio]:

$$A''B''-A''(2f-3a)-B''(2f+3a)=9aa,$$

quae iterum per factores hoc modo repraesentari potest:

$$(A''-2f-3a)(B''-2f+3a)=4ff.$$

9. Cum nunc iterum medius valor inter A'' et B'' sit $4f$, sta...

$$A''=4f-2a+\frac{s''}{A'''}\quad \text{et}\quad B''=4f+2a+\frac{s''}{B'''},$$

1) Scilicet: omisso a; confer § 18. C. B.

acta substitutione emerget ista aequatio:

$$\left(2f-5a+\frac{s''}{A'''}\right)\left(2f+5a+\frac{s''}{B'''}\right)=4ff.$$

ta igitur evolutione sublatisque fractionibus erit

$$25aaA'''B'''-A'''s''(2f-5a)-B'''s''(2f+5a)-s''s''=0.$$

natur $s''=25aa$, et ista aequatio hanc induet formam:

$$A'''B'''-A'''(2f-5a)-B'''(2f+5a)=25aa,$$

per factores hoc modo repraesentari potest:

$$(A'''-2f-5a)(B'''-2f+5a)=4ff.$$

10. Statuatur denuo, ut ante,

$$A'''=4f-2a+\frac{s'''}{A^{\mathrm{IV}}} \quad \text{et} \quad B'''=4f+2a+\frac{s'''}{B^{\mathrm{IV}}}$$

uo facta substitutione

$$\left(2f-7a+\frac{s'''}{A^{\mathrm{IV}}}\right)\left(2f+7a+\frac{s'''}{B^{\mathrm{IV}}}\right)=4ff,$$

aequatione evoluta et in ordinem redacta obtinetur

$$A^{\mathrm{IV}}B^{\mathrm{IV}}-A^{\mathrm{IV}}(2f-7a)-B^{\mathrm{IV}}(2f+7a)=49aa,$$

scilicet posuimus $s'''=49aa$; tum vero per factores erit

$$(A^{\mathrm{IV}}-2f-7a)(B^{\mathrm{IV}}-2f+7a)=4ff.$$

o perspicuum est, quomodo hae operationes sint ulterius continuandae.

pro $2A$ adipiscemur sequentem fractionem continuam:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa}{4f - 2a + \cfrac{9aa}{4f - 2a + \cfrac{25aa}{4f - 2a + \cfrac{49a\cdots}{4f\cdots}}}}$$

ubi, si loco f ordine scribamus $f + a$, $f + 2a$, $f + 3a$ et
continuae prodibunt pro $2B$, $2C$, $2D$ etc., quae ita se h

$$2B = 2f + a + \cfrac{aa}{4f + 2a + \cfrac{9aa}{4f + 2a + \cfrac{25aa}{4f + 2a + \cfrac{49aa\cdots}{4f + \cdots}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \cfrac{aa}{4f + 6a + \cfrac{9aa}{4f + 6a + \cfrac{25aa}{4f + 6a + \cfrac{49aa\cdots}{4f + \cdots}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \cfrac{aa}{4f + 10a + \cfrac{9aa}{4f + 10a + \cfrac{25aa}{4f + 10a + \cdots}}}$$

etc.

12. Quodsi iam hic ponamus $f = 1$ et $a = 1$, pr
Wallisio tractatus, unde fractiones continuae a Wallisi
valoribus per quadraturam circuli expressis erunt sequen

$$2A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}} = \frac{2}{q} = \frac{4}{\pi},$$

$$2B = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \text{etc.}}}}} = 2q = \pi,$$

$$2C = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{9}{10 + \cfrac{25}{10 + \cfrac{49}{10 + \text{etc.}}}}} = \frac{8}{q} = \frac{16}{\pi},$$

$$2D = 7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{9}{14 + \cfrac{25}{14 + \cfrac{49}{14 + \text{etc.}}}}} = \frac{9q}{2} = \frac{9\pi}{4},$$

$$2E = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{9}{18 + \cfrac{25}{18 + \cfrac{49}{18 + \text{etc.}}}}} = \frac{128}{9q} = \frac{256}{9\pi},$$

rum prima est ipsa fractio continua a BROUNCKERO inventa.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{\pi}{4},$$

quae vulgo LEIBNITIO tribui solet, multo autem ante a JACOBO GREGORIO eruta, a quo BROUNCKERUS eam nosse poterat, derivasse, quippe quod per rationes satis faciles et obvias fieri potuit sequentem in modum:

$$\begin{array}{c|c}
\text{Posito} & \text{erit} \\
\frac{\pi}{4} = 1 - \alpha & \frac{4}{\pi} = \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = 1 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{\alpha}} \\
\alpha = \frac{1}{3} - \beta & \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{1-3\beta} = 3 + \frac{9\beta}{1-3\beta} = 3 + \cfrac{9}{-3 + \cfrac{1}{\beta}} \\
\beta = \frac{1}{5} - \gamma & \frac{1}{\beta} = \frac{5}{1-5\gamma} = 5 + \frac{25\gamma}{1-5\gamma} = 5 + \cfrac{25}{-5 + \cfrac{1}{\gamma}} \\
\gamma = \frac{1}{7} - \delta & \frac{1}{\gamma} = \frac{7}{1-7\delta} = 7 + \frac{49\delta}{1-7\delta} = 7 + \cfrac{49}{-7 + \cfrac{1}{\delta}} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Quodsi iam hic loco $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ etc. valores modo inventi substituantur, se offert ipsa fractio continua BROUNCKERI, siquidem hinc sequitur fore

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

14. Quod autem ad nostram problematis solutionem generalem a etiam singularum fractionum continuarum valores per certas quadratur primere licet, id quod in sequente problemate ostendamus.

1) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I_{14}, imprimis notam ad p. 79 adiectam.

PROBLEMA

roposita serie A, B, C, D etc. **secundum** *legem uniformem procedente, ita*

$$AB = ff, \quad BC = (f+a)^2, \quad CD = (f+2a)^2 \quad etc.,$$

rum harum litterarum valores primo quidem per producta continua, tum vero mulas integrales expressas investigare.

SOLUTIO

. Cum igitur sit

$$A = \frac{ff}{B}, \quad B = \frac{(f+a)^2}{C}, \quad C = \frac{(f+2a)^2}{D} \text{ etc.,}$$

oribus continuo substitutis reperietur

$$A = \frac{ff(f+2a)^2(f+4a)^2(f+6a)^2 \text{ etc.}}{(f+a)^2(f+3a)^2(f+5a)^2 \text{ etc.}}$$

itum. Cum autem hoc modo nullus determinatus valor oriatur, quo- ubicumque abrumpitur, vel in numeratoribus vel in denominatoribus redundat, hoc incommodum tolletur, si factores simplices sequenti modo amus:

$$A = f \cdot \frac{f(f+2a)}{(f+a)(f+a)} \cdot \frac{(f+2a)(f+4a)}{(f+3a)(f+3a)} \cdot \frac{(f+4a)(f+6a)}{(f+5a)(f+5a)} \cdot \text{etc.}$$

m membra continuo propius ad unitatem accedent et in infinitum ipsi aequabuntur, sicque ista expressio aliquem determinatum valorem habebit.

. Quo autem ostendamus, quomodo eius valorem ad formulas integrales oporteat, in subsidium vocemus hoc lemma:

ntegralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensis erit

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdot \frac{m+k+3n}{m+3n}$$
$$\cdot \frac{m+k+4n}{m+4n} \cdot \ldots \cdot \int \frac{x^{\infty}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}.$$

tum vero sumto $m=f$ et $k=a$ habebimus

$$\int\frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}=\frac{f+a}{f}\cdot\frac{f+3a}{f+2a}\cdot\frac{f+5a}{f+4a}\cdot\ldots\cdot\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

quae expressio, inversa, praebet priores singulorum membrorum fa
posterioribus sumamus $m=f+a$ manente $k=a$, hocque facto er

$$\int\frac{x^{f+a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}=\frac{f+2a}{f+a}\cdot\frac{f+4a}{f+3a}\cdot\frac{f+6a}{f+5a}\cdot\ldots\cdot\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

17. Evidens nunc est posteriorem formulam per priorem divi
nostrum productum continuum exhibere, quo pacto ambo integr
tesima se mutuo tollunt, consequenter habemus

$$A=\int\frac{x^{f+a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}:\int\frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Simili modo protinus

$$B=\int\frac{x^{f+2a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}:\int\frac{x^{f+a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

$$C=\int\frac{x^{f+3a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}:\int\frac{x^{f+2a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

etc.

At vero haec investigatio adhuc generalior reddi potest, quemadmodu
problema docebit.

PROBLEMA GENERALIUS

Invenire seriem uniformi lege procedentem A, B, C, D etc., ita

$$AB=ff+c,\quad BC=(f+a)^2+c,\quad CD=(f+2a)^2+c$$
$$DE=(f+3a)^2+c\quad etc.,$$

ubi in singulis productis littera f quantitate a augeatur.

18. Hic iterum evidens est, qualis A fuerit functio ipsius f, talem esse ore B functionem ipsius $f+a$, C ipsius $f+2a$, D ipsius $f+3a$ et ita ro. Cum igitur sit $AB = ff + c$, si A et B essent aequales, omisso c t $A = B = f$. Quanto igitur A minor accipitur quam f, tanto B debet maior; unde posito $A = f - x$ erit $B = f + x$. Quoniam autem B ex A citur, si loco f scribatur $f + a$, etiam esse debet $B = f + a - x$, unde cludimus fore $x = \frac{1}{2}a$; sicque partes principales pro A et B erunt

$$A = f - \frac{1}{2}a \quad \text{et} \quad B = f + \frac{1}{2}a$$

$$2A = 2f - a \quad \text{et} \quad 2B = 2f + a$$

oque pro sequentibus

$$2C = 2f + 3a, \quad 2D = 2f + 5a, \quad 2E = 2f + 7a \quad \text{etc.}$$

19. His valoribus principalibus inventis ponamus revera esse

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A'}, \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B'}\cdot$$

pro s mox idoneus valor emerget. Hinc igitur erit

$$4AB = 4ff - aa + \frac{s}{A'}(2f + a) + \frac{s}{B'}(2f - a) + \frac{ss}{A'B'} = 4ff + 4c,$$

e aequatio sublatis fractionibus hanc induet formam:

$$A'B'(aa + 4c) - A's(2f - a) - B's(2f + a) - ss = 0.$$

namus iam $s = aa + 4c$, eritque facta divisione

$$A'B' - A'(2f - a) - B'(2f + a) = aa + 4c,$$

20. Nunc simili modo ut ante ratiocinando intelligitu
aequales, membrum sinistrum fore

$$A'A' - 4fA' = 0 \quad \text{ideoque} \quad A' = B' =$$

Quia autem B' oriri debet ex A', si loco f scribatur $f +$
principales fore

$$A' = 4f - 2a \quad \text{et} \quad B' = 4f + 2a.$$

Revera igitur ponamus esse

$$A' = 4f - 2a + \frac{s'}{A''} \quad \text{et} \quad B' = 4f + 2a +$$

unde, si hi valores substituantur, aequatio praecedens p
hanc induet formam:

$$\left(2f - 3a + \frac{s'}{A''}\right)\left(2f + 3a + \frac{s'}{B''}\right) = 4ff +$$

quae facta evolutione ad istam perducit aequationem:

$$(4ff - 9aa) + \frac{s'}{A''}(2f + 3a) + \frac{s'}{B''}(2f - 3a) + \frac{s's'}{A''B''}$$

haecque sublatis fractionibus abit in hanc:

$$A''B''(9aa + 4c) - A''s'(2f - 3a) - B''s'(2f + 3a)$$

Sumto igitur $s' = 9aa + 4c$ et facta divisione oritur haec

$$A''B'' - A''(2f - 3a) - B''(2f + 3a) = 9aa$$

quae per factores repraesentari potest hoc modo:

$$(A'' - 2f - 3a)(B'' - 2f + 3a) = 4ff + 4$$

. Quia haec aequatio similis est praecedenti iterumque pro casu $A''=B''$
t $4f$, statuatur ulterius

$$A''=4f-2a+\frac{s''}{A'''} \quad \text{et} \quad B''=4f+2a+\frac{s''}{B'''},$$

ostrema aequatio per factores foret

$$\left(2f-5a+\frac{s''}{A'''}\right)\left(2f+5a+\frac{s''}{B'''}\right)=4ff+4c.$$

a evolutione sublatisque fractionibus prodit

$$A'''B'''(25aa+4c)-A'''s''(2f-5a)-B'''s''(2f+5a)-s''s''=0.$$

o igitur $s''=25aa+4c$ et dividendo per s'' fiet

$$A'''B'''-A'''(2f-5a)-B'''(2f+5a)=25aa+4c$$

productum

$$(A'''-2f-5a)(B'''-2f+5a)=4ff+4c.$$

Statuatur ulterius

$$A'''=4f-2a+\frac{s'''}{A^{IV}} \quad \text{et} \quad B'''=4f+2a+\frac{s'''}{B^{IV}},$$

rior aequatio per productum substitutis his valoribus erit

$$\left(2f-7a+\frac{s'''}{A^{IV}}\right)\left(2f+7a+\frac{s'''}{B^{IV}}\right)=4ff+4c,$$

dem operationibus repetitis sumtoque $s'''=49aa+4c$ ad sequentem
r:

$$A^{IV}B^{IV}-A^{IV}(2f-7a)-B^{IV}(2f+7a)=49aa+4c,$$

factoribus erit

$$(A^{IV}-2f-7a)(B^{IV}-2f+7a)=4ff+4c.$$

us iam abunde liquet, quomodo calculum ulterius prosequi oporteat.

pro A obtinebimus sequentem fractionem continuam:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{9aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{25aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{49aa + 4c}{4f - 2a + \dots}}}}$$

Simili modo hinc erit

$$2B = 2f + a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 2a + \dots}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 6a + \dots}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{49aa + \dots}{4f + 10\dots}}}}$$

etc.

SOLUTIO ALTERA PER PRODUCTA CONTINUA

24. Cum sit

$$AB = ff + c, \quad BC = (f + a)^2 + c, \quad CD = (f + 2a)^2 + c, \quad DE = (f \dots$$

erit

$$A = \frac{(ff + c)((f + 2a)^2 + c)((f + 4a)^2 + c)((f + 6a)^2 + c) \text{ etc.}}{((f + a)^2 + c)((f + 3a)^2 + c)((f + 5a)^2 + c) \text{ etc.}}$$

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot ((f+4a)^2+c) \cdot \frac{1}{F} \cdot$$

Quando autem in sequente littera, G, subsistimus, fiet

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot \frac{(f+4a)^2+c}{(f+5a)^2+c} \cdot G.$$

25. Quodsi ergo istae binae expressiones in infinitum continuentur se invicem ducantur, ultimus factor litteralis, qui hic est $\frac{G}{F}$, manifesto aequabitur. Quia vero hoc casu numerus factorum in numeratore redundat, eius factorem primum in fronte seorsim scribamus, atque prod sequenti modo exprimetur:

$$A^2 = (ff+c) \cdot \frac{(ff+c)((f+2a)^2+c)}{((f+a)^2+c)((f+a)^2+c)} \cdot \frac{((f+2a)^2+c)((f+4a)^2+c)}{((f+3a)^2+c)((f+3a)^2+c)} \cdot \text{et}$$

ubi iam infinitesimi factores unitati aequabuntur sicque ista expressi formi lege procedit.

Hic autem duos casus distingui conveniet, prouti c fuerit numer negativus vel positivus.

CASUS 1, QUO $c = -bb$

26. Priore casu quilibet factor in duos resolvi se patietur. Stat igitur primo $c = -bb$, quo casu fractio continua sequenti modo ex potest:

$$2A = 2f - a + \cfrac{(a+2b)(a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(3a+2b)(3a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(5a+2b)(5a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(7a+2b)(7a-2b)}{4f - 2a + \text{etc.}}}}}$$

mulam integralem exprimi poterunt.

27. Constat enim, si haec formula integralis:

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$$

ab $x=0$ usque ad $x=1$ extendatur, valorem reduci ad sequens
infinitum:

$$\frac{m+k}{m}\cdot\frac{m+k+n}{m+n}\cdot\frac{m+k+2n}{m+2n}\cdot\ldots\ldots\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}.$$

Quo igitur hanc formam ad nostram expressionem accomodemus, c
factores in sequenti membro quantitate $2a$ augentur, sumi debet n
vero posito $m=f+b$ et $k=a$ reperietur fore

$$\frac{f+a+b}{f+b}\cdot\frac{f+3a+b}{f+2a+b}\cdot\frac{f+5a+b}{f+4a+b}\cdot\ldots\ldots\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}=\int\frac{x^{f+b-1}\partial}{\sqrt{1-x^{}}}$$

quae expressio, inversa, priores factores cuiusque membri continet.
rioribus autem manente $n=2a$ sumatur $m=f+a-b$ et $k=a$,
prodibit haec aequatio:

$$\frac{f+2a-b}{f+a-b}\cdot\frac{f+4a-b}{f+3a-b}\cdot\frac{f+6a-b}{f+5a-b}\cdot\ldots\ldots\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}=\int\frac{x^{f+a-b}}{\sqrt{1-}}$$

Si igitur haec aequatio per praecedentem dividatur, postremi fa-

s se mutuo destruent prodibitque productum infinitum in valore A occ-
ns per duas formulas integrales expressum, ita ut sit

$$A = (f-b)\cdot\int\frac{x^{f+a-b-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int\frac{x^{f+b-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

28. Quo hoc exemplo illustremus, sumamus $f=2$, $a=1$, $b=1$, ut
mus hos valores:

$$AB=3,\quad BC=8,\quad CD=15,\quad DE=24 \text{ etc.}$$

uo casu nostra fractio continua evadit

$$2A = 3 - \cfrac{3}{6+\cfrac{5}{6+\cfrac{21}{6+\cfrac{45}{6+\cfrac{77}{6+\text{etc.}}}}}}$$

or productum continuum erit

$$A = \frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\text{etc.}$$

vero per formulas integrales habebitur

$$A = \int\frac{x\partial x}{\sqrt{1-xx}} : \int\frac{xx\partial x}{\sqrt{1-xx}}.$$

tat autem pro nostris terminis integrationis, ab $x=0$ usque ad $x=1$,

$$\int\frac{x\partial x}{\sqrt{1-xx}} = 1 \quad\text{et}\quad \int\frac{xx\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{4},$$

colligitur $A=\frac{4}{\pi}$, id quod cum ipso producto WALLISIANO, quo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\text{etc.},$$

gio convenit.

29. Evolvamus nunc quoque alterum casum $c = + bb$,
continua hanc formam induit:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{9aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{25aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{49aa + 4\ldots}{4f - 2a + \ldots}}}}$$

At vero productum continuum ex praecedente forma loco b s
ita imaginario expressum se prodit:

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \cdot \frac{(f + b\sqrt{-1})(f + 2a - b\sqrt{-1})}{(f + a + b\sqrt{-1})(f + a - b\sqrt{-1})} \cdot \frac{(f + 2a + b\sqrt{-1})(f + \ldots}{(f + 3a + b\sqrt{-1})(f + \ldots}$$

Evidens autem est in eadem expressione § 26 allata etiam loco
$-b\sqrt{-1}$, unde prodiisset

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \frac{(f - b\sqrt{-1})(f + 2a + b\sqrt{-1})}{(f + a - b\sqrt{-1})(f + a + b\sqrt{-1})} \cdot \frac{(f + 2a - b\sqrt{-1})(f + \ldots}{(f + 3a - b\sqrt{-1})(f + \ldots}$$

Productum igitur harum duarum expressionum fit reale; erit

$$A^2 = (ff + bb) \frac{(ff + bb)((f + 2a)^2 + bb)}{((f + a)^2 + bb)((f + a)^2 + bb)} \cdot \frac{((f + 2a)^2 + bb)((f + 4\ldots}{((f + 3a)^2 + bb)((f + 3\ldots}$$

quae expressio congruit cum superiore § 25 inventa.

30. At vero etiam expressio per formulas integrales ev
Si enim in formulis § 27 loco b scribatur $b\sqrt{-1}$, orietur se

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f + a - 1 - b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1 - x^{2a}}} : \int \frac{x^{f - 1 + b\sqrt{-1}}\partial \ldots}{\sqrt{1 - x^{2a}}}$$

Verum mutato imaginariorum signo erit

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f + a - 1 + b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1 - x^{2a}}} : \int \frac{x^{f - 1 - b\sqrt{-1}}\partial \ldots}{\sqrt{1 - x^{2a}}}$$

ubi nullum est dubium, quin in utraque expressione imaginaria se m
destruant, etiamsi nulla pateat methodus hanc mutuam imaginariorum dest
tionem actu evolvere.

31. Verum si hae ambae expressiones in se mutuo ducantur, tum
destructio haud difficulter ostendi poterit. Cum enim productum sit

$$A^2 = (ff+bb)\frac{\int \frac{x^{f+a-1-b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}\cdot\int \frac{x^{f+a-1+b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}}{\int \frac{x^{f-1+b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}\cdot\int \frac{x^{f-1-b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}},$$

demonstrari potest tam in numeratore quam in denominatore imagin
seorsim se destruere, quod quidem pro denominatore ostendisse sufficiet,
numerator inde oriatur scribendo $f+a$ loco f.

32. Quo demonstratio succinctior reddatur, ponamus brevitatis grati

$$\frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \partial V,$$

quo facto denominator nostrae expressionis imaginariis affectae erit

$$\int x^{+b\sqrt{-1}}\partial V\cdot\int x^{-b\sqrt{-1}}\partial V.$$

Iam statuatur factorum

$$\text{summa} = \int (x^{b\sqrt{-1}} + x^{-b\sqrt{-1}})\,\partial V = p,$$

$$\text{differentia} = \int (x^{b\sqrt{-1}} - x^{-b\sqrt{-1}})\,\partial V = q,$$

atque notum est productum propositum fore

$$\int x^{b\sqrt{-1}}\partial V\cdot\int x^{-b\sqrt{-1}}\partial V = \frac{pp-qq}{4}.$$

Monstrabo igitur tam pp quam qq ad quantitates reales reduci posse.

$$p = \int (e^{blx\sqrt{-1}} + e^{-blx\sqrt{-1}})\,\partial V,$$
$$q = \int (e^{blx\sqrt{-1}} - e^{-blx\sqrt{-1}})\,\partial V.$$

Cum igitur noverimus esse

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\cos.\varphi$$

et

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin.\varphi,$$

posito brevitatis gratia $blx = \varphi$ fiet

$$p = 2\int \partial V \cos.\varphi \quad \text{et} \quad q = 2\sqrt{-1}\int \partial V \sin.\varphi,$$

unde sponte fluit denominator

$$\frac{pp - qq}{4} = \left(\int \partial V \cos.\varphi\right)^2 + \left(\int \partial V \sin.\varphi\right)^2,$$

expressio, quae manifesto est realis.

34. Hinc facile colligitur valor numeratoris, quippe qui orit

$$\left(\int x^a \partial V \cos.\varphi\right)^2 + \left(\int x^a \partial V \sin.\varphi\right)^2,$$

ita ut expressio nostra imaginariis turbata pro A^2 sequenti m
repraesentetur:

$$A^2 = (ff + bb)\frac{(\int x^a \partial V \cos.\varphi)^2 + (\int x^a \partial V \sin.\varphi)^2}{(\int \partial V \cos.\varphi)^2 + (\int \partial V \sin.\varphi)^2}$$

existente

$$\partial V = \frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1 - x^{2a}}} \quad \text{et} \quad \varphi = blx.$$

35. In analysi autem adhuc desideratur methodus per i
tractandi huiusmodi formulas:

$$\int \frac{x^{f-1}\partial x \cos.blx}{\sqrt{1 - x^{2a}}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^{f-1}\partial x \sin.blx}{\sqrt{1 - x^{2a}}}.$$

rim tamen si denominator abesset, utraque formula revera integrari posset, quod sequenti modo ostendisse operae pretium erit.

36. Praestari enim hoc poterit ope reductionis notissimae

$$\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P.$$

cilicet pro formula priore sumatur

$$P = \cos. blx \quad \text{et} \quad \partial Q = x^{f-1}\partial x,$$

$$\int x^{f-1}\partial x \cos. blx = \frac{x^f}{f} \cos. blx + \frac{b}{f}\int x^{f-1}\partial x \sin. blx.$$

altera vero, sumto

$$P = \sin. blx \quad \text{et} \quad \partial Q = x^{f-1}\partial x,$$

$$\int x^{f-1}\partial x \sin. blx = \frac{x^f}{f} \sin. blx - \frac{b}{f}\int x^{f-1}\partial x \cos. blx.$$

c porro colligitur substituendo

$$\int x^{f-1}\partial x \cos. blx = \frac{x^f}{ff+bb}(f\cos. blx + b\sin. blx),$$

$$\int x^{f-1}\partial x \sin. blx = \frac{x^f}{ff+bb}(f\sin. blx - b\cos. blx).$$

vero accedente denominatore nihil aliud intelligitur, nisi integrale ad genus ntitatum maxime transcendentium adhuc ignotum revolvi.

METHODUS SUCCINCTA SUMMAS SERIERUM INFINITARUM PER FORMULAS DIFFERENTIALES INVESTIG

Conventui exhibuit die 13. Martii 1780

Commentatio 746 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 45—

1. Etsi hoc argumentum iam saepius[1]) pertractavi, tamen ploraq ad summas commode exprimendas spectant, per varios libros sunt atque etiam per ambages eruta; quamobrem hic succinctam metho traditurus, cuius ope seriei cuiuscunque summa facili calculo sine a per formam simplicissimam indagari poterit.

2. Sit igitur X functio quaecunque ipsius x, et X', X'', X''' oriantur, si loco x successive scribatur $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. H litterae illae X, X', X'', X''' etc. mihi designabunt terminos cuiusq indicibus x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. respondentes. His positis du serierum infinitarum sum contemplaturus, quorum priore termini omn signo $+$ affecti progrediuntur, ita ut series summanda sit

$$X + X' + X'' + X''' + \text{etc}$$

1) Confer Commentationes 25, 41, 47, 55, 61, 63, 130, 189, 352, 393, 597. Confer pc *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. X et *Institutiones c rentialis*, 1755, partis posterioris cap. V; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series pri p. 42, 73. 108, 124, 138, 177, 407, 463; vol. 15 p. 70, 91, 701; vol. 8 p. 181; vol. 10 p. 3

ero vero casu iidem termini signis alternantibus procedant, ita ut series mmanda sit

$$X - X' + X'' - X''' + \text{etc.}$$

igitur duos casus seorsim evolvam.

CASUS I
SUMMATIO SERIEI INFINITAE $S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$

3. Denotet S' summam eiusdem seriei primo termino truncatae, ita ut sit

$$S' = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

cum S sit certa functio ipsius x, quam hic potissimum investigamus, erit imilis functio ipsius $x + 1$. Evidens ergo est fore $S - S' = X$. Quare sit

$$S' = S + \partial S + \frac{1}{2}\partial\partial S + \text{etc.},$$

denominatores, potestates elementi ∂x continentes, ut brevitati consulam, termitto, siquidem quasi sponte subintelliguntur, hinc nostra aequatio et hanc formam:

$$0 = X + \partial S + \frac{1}{2}\partial\partial S + \frac{1}{6}\partial^3 S + \frac{1}{24}\partial^4 S + \text{etc.}$$

4. Quodsi ergo ista series valde convergat, proxime erit $\partial S = -X$ que $S = -\int X\partial x$, quod integrale per constantem ita est determinandum, umto x infinite magno evanescat, propterea quod termini infinitesimi pro o haberi possunt, quia alias series ipsa nullam haberet summam finitam. nita proxime summa, pro vera summa statuamus

$$S = -\int X\partial x - \alpha X - \beta\partial X - \gamma\partial\partial X - \text{etc.}$$

uo hinc

$$\partial S = -X - \alpha\partial X - \beta\partial\partial X - \gamma\partial^3 X - \text{etc.}$$

stituantur, pervenietur ad sequentem aequationem:

$$\left.\begin{array}{llllll} +X-\alpha\partial X- & \beta\partial\partial X- & \gamma\partial^3 X- & \delta\partial^4 X-\text{etc.} \\ -X-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\alpha & -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\gamma \\ & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\alpha & -\frac{1}{6}\beta \\ & & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24}\alpha \\ & & & -\frac{1}{120} \end{array}\right\} =$$

et iam coëfficientes incogniti α, β, γ etc. ex sequentibus aequali
finiri debent:

$$\alpha+\frac{1}{2}=0, \quad \beta+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{6}=0, \quad \gamma+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{24}=0$$

unde fit

$$\alpha=-\frac{1}{2}, \quad \beta=\frac{1}{12}, \quad \gamma=0 \quad \text{etc.}$$

5. Hoc autem modo inventio litterarum α, β, γ etc. nimis fo
neque tamen ulla lex perspiceretur, qua ulterius progrediantur;
modo prorsus singulari in valores istarum litterarum inquiram.
scilicet seriem ordinariam secundum eosdem coëfficientes procedente

$$V=1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.},$$

atque evidens est, si huius seriei summa V ad formam finitam po
tum, si eadem secundum potestates ipsius z evolvatur, eandem se
sario provenire debere, quo pacto valores litterarum α, β, γ, δ
innotescent.

6. Ex relationibus igitur, quae inter litteras α, β, γ, δ etc.
supra § 4 allatis, sequentes operationes instituantur:

$$\begin{array}{rcccccccc}
V = & 1 & + \alpha z & + \beta z^2 & + \gamma z^3 & + \delta z^4 & + \varepsilon z^5 & + \text{etc.},\\
\frac{1}{2} z V = & & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\alpha & +\frac{1}{2}\beta & +\frac{1}{2}\gamma & +\frac{1}{2}\delta & + \text{etc.},\\
\frac{1}{6} zz V = & & & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6}\alpha & +\frac{1}{6}\beta & +\frac{1}{6}\gamma & + \text{etc.},\\
\frac{1}{24} z^3 V = & & & & +\frac{1}{24} & +\frac{1}{24}\alpha & +\frac{1}{24}\beta & + \text{etc.},\\
\frac{1}{120} z^4 V = & & & & & +\frac{1}{120} & +\frac{1}{120}\alpha & + \text{etc.},\\
\frac{1}{720} z^5 V = & & & & & & +\frac{1}{720} & + \text{etc.}\\
 & & & & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

cilicet modo omnes termini praeter primum ad nihilum sunt reducti; e ergo

$$V\left(1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{120} z^4 + \frac{1}{720} z^5 + \text{etc.}\right) = 1.$$

. Cum igitur sit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \text{etc.},$$

$$\frac{V(e^z - 1)}{z} = 1$$

o

$$V = \frac{z}{e^z - 1};$$

expressio quo facilius iterum in seriem converti queat, ponamus $z = 2t$,

$$V = \frac{2t}{e^{2t} - 1}$$

e

$$V + t = t \cdot \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}.$$

statuatur

$$\frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = u$$

$$u = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}},$$

hinc exponentialibus evolutis erit

$$u = \frac{1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \text{etc.}}{t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{5040}t^7 + \text{etc.}},$$

ubi in numeratore solae potestates pares, in denominato
states impares occurrunt. Patet autem sumto t quam n
sequentes vero terminos per potestates t, t^3, t^5 etc. esse p

8. Cum igitur posuerimus

$$u = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1},$$

erit

$$e^{2t} = \frac{u + 1}{u - 1}$$

ideoque

$$2t = l\frac{u + 1}{u - 1}.$$

Hinc ergo differentiando erit

$$\partial t = -\frac{\partial u}{uu - 1},$$

unde concluditur fore

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu - 1 = 0.$$

Quia autem novimus primum terminum seriei, qua u exprin
sequentium potestatum exponentes binario crescere, statuatur

$$u = \frac{1}{t} + 2At - 2Bt^3 + 2Ct^5 - 2Dt^7 + \text{etc.}$$

...nstituto sequenti modo:

$$\frac{1}{u} + 2A - 6Bu^2 + 10Cu^4 - 14Du^6 + 18Eu^8 - \text{etc.},$$

$$+\frac{1}{u} + 4A - 4Bu^2 + 4Cu^4 - 4Du^6 + 4Eu^8 - \text{etc.},$$

$$+ 4AA - 8ABu^2 + 8ACu^4 - 8ADu^6$$

$$+ 4BBu^4 - 8BCu^6$$

...i primi se sponte destruunt, reliqui vero sequentes praebent deter-...:

$$6A = 1 \quad \text{ergo} \quad A = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$10B = 4AA \quad \text{ergo} \quad B = \frac{2}{5} AA = \frac{1}{90},$$

$$14C = 8AB \quad \text{ergo} \quad C = \frac{2}{7} \cdot 2AB = \frac{1}{945},$$

$$18D = 8AC + 4BB \quad \text{ergo} \quad D = \frac{2}{9}(2AC + BB) = \frac{1}{9450},$$

$$22E = 8(AD + BC) \quad \text{ergo} \quad E = \frac{2}{11}(2AD + 2BC) = \frac{1}{93555}$$

etc.

...ae ergo litterae A, B, C, D etc. prorsus eaedem sunt, quibus ...summus potestatum reciprocarum exprimendas sum usus, siquidem

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = A\pi^2,$$

$$1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} = B\pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} = C\pi^6$$

etc.,

...r Commentationes supra laudatas, imprimis 41, 61, 63, 130, 393, 597. C. B.

10. Cum igitur sumserimus

$$u = \frac{1}{t} + 2At - 2Bt^3 + 2Ct^5 - \text{etc.},$$

ob

$$V = tu - t$$

erit

$$V = 1 - t + 2At^2 - 2Bt^4 + 2Ct^6 - 2Dt^8 + \text{etc.},$$

ubi nil aliud superest, nisi ut loco t scribatur $\frac{1}{2}z$, unde prodit

$$V = 1 - \frac{z}{2} + \frac{Azz}{2} - \frac{Bz^4}{8} + \frac{Cz^6}{32} - \frac{Dz^8}{128} + \text{etc.}$$

Cum igitur habuerimus

$$V = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.},$$

collatione instituta reperiemus

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}A, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\frac{1}{8}B, \quad \varepsilon = 0, \quad \zeta = \frac{1}{32}C, \quad \eta =$$

11. Inventis iam valoribus harum litterarum summa seriei prop

$$S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

sequenti mode exprimetur:

$$S = -\int X\partial x + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}A\partial X + \frac{1}{8}B\partial^3 X - \frac{1}{32}C\partial^5 X + \frac{1}{128}D\partial^7 X$$

$$-\frac{1}{512}E\partial^9 X + \text{etc.},$$

1) In Commentatione 597, *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I_{15}, p. 712. C

si constans adiicienda debeat esse infinita, etiam ipsam seriei summam infinitam.

12. Consideremus exemplum, quo $X = \frac{1}{x^n}$, ita ut huius seriei summ quaerenda:

$$S = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \frac{1}{(x+3)^n} + \text{etc.}$$

Hic igitur erit

$$\int X\partial x = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},$$

quae forma ut evanescat posito $x = \infty$, necesse est, ut exponens n sit tate maior. Alioquin enim, si esset $n = 1$ vel $n < 1$, summa seriei certe infinite magna. Porro vero erit

$$\partial X = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \text{hinc} \quad \partial^3 X = -\frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}}, \quad \partial^5 X = -\frac{n\cdots(n+4)}{x^{n+5}} \quad \text{et}$$

quibus valoribus substitutis summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{2x^n} + \frac{A}{2}\cdot\frac{n}{x^{n+1}} - \frac{B}{8}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}} + \frac{C}{32}\cdot\frac{n\cdots(n+4)}{x^{n+5}} - \text{e}$$

quae series eo magis converget, quo maior accipietur numerus x, praeter quod litterae A, B, C etc. progressionem valde convergentem constituun

13. Quodsi ergo ab unitate incipiendo hi termini

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots + \frac{1}{(x-1)^n}$$

actu colligantur eorumque summa vocetur Δ, eiusdem seriei in infin continuatae summa erit $\Delta + S$. Hoc modo olim[1]) summas talium serie infinitarum pro singulis exponentis n valoribus 2, 3, 4, 5 etc. ad plures fig decimales computavi sumto scilicet $x = 10$, quo pacto calculus satis exp absolvi poterat.

1) Vide Commentationem 47, § 31. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, vol. I14, p. 121.

14. Quodsi igitur index x unitate augeatur, habebimus

$$S' = X' - X'' + X''' - X^{\mathrm{IV}} + \text{etc.}$$

Addatur haec aequatio ad praecedentem, prodibitque aequatio fini

$$S + S' = X.$$

Quare per formulas differentiales habebimus

$$X = 2S + \partial S + \frac{1}{2}\partial\partial S + \frac{1}{6}\partial^3 S + \frac{1}{24}\partial^4 S + \text{etc.},$$

unde neglectis differentialibus erit $S = \frac{1}{2}X$, qui ergo erit primu seriei quam quaerimus. Statuamus igitur

$$S = \frac{1}{2}X + \alpha\partial X + \beta\partial\partial X + \gamma\partial^3 X + \text{etc.}$$

et facta substitutione fiet

$$\begin{array}{rcccccccccc}
2S = & X & + & 2\alpha\partial X & + & 2\beta\partial\partial X & + & 2\gamma\partial^3 X & + & 2\delta\partial^4 X & + \text{et} \\
\partial S = & & & \frac{1}{2} & + & \alpha & + & \beta & + & \gamma & + \text{et} \\
\frac{1}{2}\partial\partial S = & & & & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{2}\alpha & + & \frac{1}{2}\beta & + \text{et} \\
\frac{1}{6}\partial^3 S = & & & & & & + & \frac{1}{12} & + & \frac{1}{6}\alpha & + \text{et} \\
\frac{1}{24}\partial^4 S = & & & & & & & & + & \frac{1}{48} & + \text{et}
\end{array}$$

etc.,

quae expressio tota soli X est aequanda.

15. Singulis igitur columnis verticalibus ad nihilum redactis orientur
entes aequalitates:

$$2\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad 2\beta + \alpha + \frac{1}{4} = 0, \quad 2\gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12} = 0,$$

$$2\delta + \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{48} = 0 \text{ etc.,}$$

e priores saltem litterae has recipiunt determinationes:

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{48}, \quad \delta = 0 \text{ etc.}$$

16. Quo autem hos valores facilius investigemus, consideremus hanc seriem:

$$V = \frac{1}{2} + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.},$$

s scilicet summam V quaeri oporteat. Inde ergo sequentes derivemus series:

$$\begin{array}{lcccccccc}
2V & = 1 + 2\alpha z & + 2\beta zz & + 2\gamma z^3 & + 2\delta z^4 & + 2\varepsilon z^5 & + \text{etc.}, \\
Vz & = & + \frac{1}{2}z & + \alpha zz & + \beta z^3 & + \gamma z^4 & + \delta z^5 & + \text{etc.}, \\
\frac{1}{2}Vzz = & & & + \frac{1}{4} & + \frac{1}{2}\alpha & + \frac{1}{2}\beta & + \frac{1}{2}\gamma & + \text{etc.}, \\
\frac{1}{6}Vz^3 = & & & & + \frac{1}{12} & + \frac{1}{6}\alpha & + \frac{1}{6}\beta & + \text{etc.}, \\
\frac{1}{24}Vz^4 = & & & & & + \frac{1}{48} & + \frac{1}{24}\alpha & + \text{etc.} \\
& & & & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

un igitur serierum summa ob aequalitates ante allatas fiet $= 1$, sicque
bimus istam aequationem:

$$V\left(2 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \text{etc.}\right) = 1.$$

Quare cum sit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \text{etc.},$$

erit manifesto

$$V(1 + e^z) = 1$$

sive

$$V = \frac{1}{1 + e^z},$$

unde fit

$$2V - 1 = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}.$$

17. Ponatur igitur ut ante

$$\frac{e^z - 1}{e^z + 1} = u,$$

ut sit

$$2V = 1 - u,$$

sitque iterum $z = 2t$, ita ut

$$u = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

et facta evolutione erit

$$u = \frac{t + \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{120} t^5 + \frac{1}{5040} t^7 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + \frac{1}{720} t^6 + \text{etc.}}.$$

Unde patet seriei valorem ipsius u exprimentis primum terminu
sequentes vero per potestates impares ipsius t progredi.

18. Cum igitur sit

$$u = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

erit

$$e^{2t} = \frac{1 + u}{1 - u}$$

ideoque

$$2t = l\frac{1 + u}{1 - u},$$

e differentiando fit

$$\partial t = \frac{\partial u}{1 - uu},$$

nt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu - 1 = 0,$$

e est ipsa aequatio pro casu priore inventa. Neque tamen propterea pr
eadem series provenit. Quoniam enim hic primus seriei terminus debe
$= t$, fingenda est huiusmodi series:

$$u = t - \mathfrak{A}t^3 + \mathfrak{B}t^5 - \mathfrak{C}t^7 + \mathfrak{D}t^9 - \mathfrak{E}t^{11} + \text{etc.}$$

ique debebit facta substitutione

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{\partial u}{\partial t} = 1 - 3\mathfrak{A}tt & + 5\mathfrak{B}t^4 & - 7\mathfrak{C}t^6 & + 9\ \mathfrak{D}t^8 & - 11\ \mathfrak{E}t^{10} & + \text{etc.}, \\
uu = \quad + \ 1 & - 2\mathfrak{A} & + 2\mathfrak{B} & - 2\ \mathfrak{C} & + 2\ \mathfrak{D} & - \text{etc.} \\
 & & + \mathfrak{A}^2 & - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} & + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C} & - \text{etc.} \\
 & & & & + \mathfrak{B}^2 & + \text{etc.} \\
 & & & \text{etc.} & & \\
-1 = -1 & & & & &
\end{array}$$

ne hinc sequentes oriuntur determinationes:

$$\begin{array}{lll}
3\mathfrak{A} = 1 & \text{ideoque} & \mathfrak{A} = \frac{1}{3}, \\
5\mathfrak{B} = 2\mathfrak{A} & \text{ideoque} & \mathfrak{B} = \frac{2}{5}\mathfrak{A} = \frac{2}{15}, \\
7\mathfrak{C} = 2\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^2 & \text{hinc} & \mathfrak{C} = \frac{2}{7}\mathfrak{B} + \frac{1}{7}\mathfrak{A}^2 = \frac{17}{315}, \\
9\mathfrak{D} = 2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} & \text{ergo} & \mathfrak{D} = \frac{2}{9}\mathfrak{C} + \frac{2}{9}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{62}{2835} \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

27*

19. Cum igitur sit

$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u,$$

si loco t restituamus $\frac{z}{2}$, pro V hanc reperiemus seriem:

$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{16}\mathfrak{A}z^3 - \frac{1}{64}\mathfrak{B}z^5 + \frac{1}{256}\mathfrak{C}z^7 - \frac{1}{1024}\mathfrak{D}z^9 + \text{etc.}$$

Quare cum posuerimus

$$V = \frac{1}{2} + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \text{ etc.},$$

hinc colligimus valores litterarum α, β, γ, δ etc., qui ergo erunt

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{16}\mathfrak{A}, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = -\frac{1}{64}\mathfrak{B}, \quad \zeta = 0, \quad \eta = \frac{1}{256}\mathfrak{C},$$

consequenter summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\partial X + \frac{1}{16}\mathfrak{A}\partial^3 X - \frac{1}{64}\mathfrak{B}\partial^5 X + \frac{1}{256}\mathfrak{C}\partial^7 X - \text{etc.}$$

20. Comparemus nunc istos coëfficientes cum iis, quos in casu
dente pro similibus differentialibus sumus adepti, qui erant $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{8}$
atque egregiam relationem inter utrosque deprehendemus, uti ex hoc
videre licet:

$$\begin{array}{c|c}
\partial X & \frac{1}{4} : \frac{A}{2} = 3 = 2^2 - 1, \\
\partial^3 X & \frac{\mathfrak{A}}{16} : \frac{B}{8} = 15 = 2^4 - 1, \\
\partial^5 X & \frac{\mathfrak{B}}{64} : \frac{C}{32} = 63 = 2^6 - 1, \\
\partial^7 X & \frac{\mathfrak{C}}{256} : \frac{D}{128} = 255 = 2^8 - 1, \\
\partial^9 X & \frac{\mathfrak{D}}{1024} : \frac{E}{512} = 1023 = 2^{10} - 1 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

1. Per eosdem igitur numeros notissimos A, B, C, D etc. etiam hoc summa quaesita sequenti modo commodo exprimetur:

$$S = \frac{1}{2}X - (2^2 - 1)\frac{A}{2}\cdot\partial X + (2^4 - 1)\frac{B}{8}\cdot\partial^3 X - (2^6 - 1)\frac{C}{32}\cdot\partial^5 X$$

$$+ (2^8 - 1)\frac{D}{128}\cdot\partial^7 X - (2^{10} - 1)\frac{E}{512}\cdot\partial^9 X + \text{etc.},$$

seriem, quousque lubuerit, continuare licet.

DE SERIEBUS MEMORABILIBUS QUIBUS SINUS ET COSINUS ANGULORUM MULTIPLORUM EXPRIMERE LICET[1]

Conventui exhibuit die 13. Martii 1780

Commentatio 747 indicis Enestroemiani

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 57—72

1. Series, quas hic sum expositurus, non tam ob usum in multiplicati angulorum, quam ob eximia calculi artificia, quae me ad eas perduxor imprimis autem propter egregiam simplicitatem legis, qua earum termini grediuntur, omni attentione dignae videntur. Ad eas autem commodius vestigandas utor characteribus, quibus coëfficientes potestatum binomial designare soleo. Ita si x fuerit exponens potestatis, hi characteres seque habeant significationes:

$$\left(\frac{x}{1}\right) = x, \quad \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}, \quad \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \quad \text{etc.}$$

sicque in genere erit

$$\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}.$$

2. Proposito nunc angulo quocunque φ pro eius multiplo quocunque tales series secundum memoratos characteres procedentes indagabo, quae

1) Vide notam ad p. 542 vol. I14 adiectam et Commentationes ibi laudatas 686, 703, praesentis voluminis. C. B.

sinum quam sinum huius anguli multipli exprimant. Ac primo quidem sinu istam fingo seriem:

$$\cos. x\varphi = 1 + \left(\frac{x}{1}\right)A + \left(\frac{x}{2}\right)B + \left(\frac{x}{3}\right)C + \left(\frac{x}{4}\right)D + \text{etc.},$$

nae semper abrumpitur, quoties x denotat numerum integrum positivu liquis autem casibus in infinitum excurrit. Ad has autem litteras A, B, etc. investigandas loco x successive assumo valores 1, 2, 3, 4 etc., uidem valores $\cos.\varphi$, $\cos.2\varphi$, $\cos.3\varphi$, $\cos.4\varphi$ etc. tanquam cognitos spe

3. Facta igitur hac evolutione sequentes valores pro litteris A, B, C, D perientur:

Si	erit
$x = 1$	$\cos. \varphi = 1 + A$,
	ergo
	$A = \cos.\varphi - 1$,
$x = 2$	$\cos. 2\varphi = 1 + 2A + B$,
	ergo
	$B = \cos. 2\varphi - 2\cos.\varphi + 1$,
$x = 3$	$\cos. 3\varphi = 1 + 3A + 3B + C$,
	ergo
	$C = \cos. 3\varphi - 3\cos. 2\varphi + 3\cos.\varphi - 1$,
$x = 4$	$\cos. 4\varphi = 1 + 4A + 6B + 4C + D$,
	ergo
	$D = \cos. 4\varphi - 4\cos. 3\varphi + 6\cos. 2\varphi - 4\cos.\varphi + 1$,
$x = 5$	$\cos. 5\varphi = 1 + 5A + 10B + 10C + 5D + E$,
	ergo
	$E = \cos. 5\varphi - 5\cos. 4\varphi + 10\cos. 3\varphi - 10\cos. 2\varphi + 5\cos.\varphi - 1$
etc.	etc.

4. Hinc ergo in genere, pro casu $x = n$, si littera coëfficienti fuerit N, sequitur fore

$$N = \cos. n\varphi - \left(\frac{n}{1}\right)\cos.(n-1)\varphi + \left(\frac{n}{2}\right)\cos.(n-2)\varphi - \left(\frac{n}{3}\right)\cos.(n$$

Nunc igitur praecipuum negotium huc redit, ut istius expression valor ad formulam finitam reducatur, id quod fit, si illius ser quae est N, elicuerimus. Quanquam autem plures iam huiusmo cundum cosinus procedentes sunt summatae, tamen methodi, qui ad eas investigandas sunt usi, vix ac ne vix quidem ad hunc ca modari posse videntur. Singularem igitur methodum hic propon ad hunc scopum perduxit.

5. Considero scilicet has binas formulas imaginarias:

$$p = \cos. \varphi + \sqrt{-1} \sin. \varphi \quad \text{et} \quad q = \cos. \varphi - \sqrt{-1} \sin. \varphi$$

ex quibus constat fore

$$p^n + q^n = 2\cos. n\varphi$$

ideoque

$$\cos. n\varphi = \frac{1}{2}(p^n + q^n).$$

Similique modo erit

$$\cos.(n-1)\varphi = \frac{1}{2}(p^{n-1} + q^{n-1})$$

et ita porro, quibus valoribus substitutis et potestatibus littera seorsim positis facta multiplicatione per 2 habebimus

$$2N = +p^n - \left(\frac{n}{1}\right)p^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)p^{n-2} - \left(\frac{n}{3}\right)p^{n-3} + \text{etc.}$$

$$+q^n - \left(\frac{n}{1}\right)q^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)q^{n-2} - \left(\frac{n}{3}\right)q^{n-3} + \text{etc.}$$

$$2N = (p-1)^n + (q-1)^n,$$

formulas ergo ulterius prosequi oportet.

6. Cum igitur sit

$$p = \cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi,$$

$$p - 1 = \cos.\varphi - 1 + \sqrt{-1}\sin.\varphi.$$

statuamus $\varphi = 2\omega$, et cum sit

$$\cos.\varphi = 1 - 2\sin.\omega^2 \quad \text{et} \quad \sin.\varphi = 2\sin.\omega\cos.\omega,$$

bimus

$$p - 1 = 2\sin.\omega\left(\sqrt{-1}\cos.\omega - \sin.\omega\right),$$

expressio reducitur ad hanc:

$$p - 1 = 2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega).$$

li autem modo reperietur

$$q - 1 = -2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega - \sqrt{-1}\sin.\omega).$$

his igitur formulis conficietur

$$(p-1)^n = 2^n\left(\sqrt{-1}\right)^n\sin.\omega^n\left(\cos.n\omega + \sqrt{-1}\sin.n\omega\right),$$

$$(q-1)^n = 2^n\left(-\sqrt{-1}\right)^n\sin.\omega^n\left(\cos.n\omega - \sqrt{-1}\sin.n\omega\right),$$

um ergo formularum summa praebet valorem ipsius $2N$, quem quaerimus.

7. Potestates autem imaginariorum $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ modo fiunt modo -1, modo imaginariae $\pm\sqrt{-1}$, prout exponens n fuerit numer formae $4i$ vel $4i+1$ vel $4i+2$ vel $4i+3$, quandoquidem constat ess

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-1})^{4i} &= +1; & (-\sqrt{-1})^{4i} &= +1,\\
(\sqrt{-1})^{4i+1} &= \sqrt{-1}; & (-\sqrt{-1})^{4i+1} &= -\sqrt{-1},\\
(\sqrt{-1})^{4i+2} &= -1; & (-\sqrt{-1})^{4i+2} &= -1,\\
(\sqrt{-1})^{4i+3} &= -\sqrt{-1}; & (-\sqrt{-1})^{4i+3} &= +\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

8. Hac observatione praemissa tribuamus nunc successive expon valores 1, 2, 3, 4 etc., quo pacto N denotabit successive litteras A, B, C, quarum ergo valores sequenti modo per angulum $\omega = \frac{1}{2}\varphi$ expressos r mus. Sit igitur primo $n = 1$, erit

$$\begin{aligned}
2A = 2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)\\
-2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega - \sqrt{-1}\sin.\omega),
\end{aligned}$$

qui ergo valor reducitur ad hanc formam:

$$2A = -4\sin.\omega\sin.\omega$$

ideoque

$$A = -2\sin.\omega\sin.\omega.$$

9. Sumto autem $n = 2$ fiet

$$\begin{aligned}
2B = -4\sin.\omega^2(\cos.2\omega + \sqrt{-1}\sin.2\omega)\\
-4\sin.\omega^2(\cos.2\omega - \sqrt{-1}\sin.2\omega),
\end{aligned}$$

unde colligitur

$$B = -4\sin.\omega^2\cos.2\omega.$$

10. Sit $n = 3$, eritque

$$2C = -8\sqrt{-1}\sin.\omega^3(\cos.3\omega + \sqrt{-1}\sin.3\omega)$$

$$+8\sqrt{-1}\sin.\omega^3(\cos.3\omega - \sqrt{-1}\sin.3\omega),$$

ex quo fit

$$C = 8\sin.\omega^3\sin.3\omega.$$

11. Sumatur $n = 4$, atque nanciscemur

$$2D = 16\sin.\omega^4(\cos.4\omega + \sqrt{-1}\sin.4\omega)$$

$$+16\sin.\omega^4(\cos.4\omega - \sqrt{-1}\sin.4\omega),$$

hincque oritur

$$D = 16\sin.\omega^4\cos.4\omega.$$

12. Sumto porro $n = 5$ fit

$$2E = 32\sqrt{-1}\sin.\omega^5(\cos.5\omega + \sqrt{-1}\sin.5\omega)$$

$$-32\sqrt{-1}\sin.\omega^5(\cos.5\omega - \sqrt{-1}\sin.5\omega),$$

ergo colligendo prodit

$$E = -32\sin.\omega^5\sin.5\omega.$$

13. Pro casu $n = 6$ invenitur

$$2F = -64\sin.\omega^6(\cos.6\omega + \sqrt{-1}\sin.6\omega)$$

$$-64\sin.\omega^6(\cos.6\omega - \sqrt{-1}\sin.6\omega),$$

sive

$$F = -64\sin.\omega^6\cos.6\omega.$$

14. Statuatur porro $n = 7$, eritque

$$2G = -128\sqrt{-1}\sin.\omega^7(\cos.7\omega + \sqrt{-1}\sin.7\omega)$$
$$+128\sqrt{-1}\sin.\omega^7(\cos.7\omega - \sqrt{-1}\sin.7\omega)$$

ideoque

$$G = +128\sin.\omega^7\sin.7\omega.$$

15. Denique posito $n = 8$ prodit

$$2H = +256\sin.\omega^8(\cos.8\omega + \sqrt{-1}\sin.8\omega)$$
$$+256\sin.\omega^8(\cos.8\omega - \sqrt{-1}\sin.8\omega),$$

hincque

$$H = +256\sin.\omega^8\cos.8\omega.$$

16. Istos igitur valores per periodos quadripartitas progredien quentibus duabus columnis iunctim repraesentemus:

$$\begin{array}{ll}
A = -2\sin.\omega\sin.\ \omega, & B = -2^2\sin.\omega^2\cos.\ 2\omega,\\
C = +2^3\sin.\omega^3\sin.3\omega, & D = +2^4\sin.\omega^4\cos.\ 4\omega,\\
E = -2^5\sin.\omega^5\sin.5\omega, & F = -2^6\sin.\omega^6\cos.\ 6\omega,\\
G = +2^7\sin.\omega^7\sin.7\omega, & H = +2^8\sin.\omega^8\cos.\ 8\omega,\\
I = -2^9\sin.\omega^9\sin.9\omega, & K = -2^{10}\sin.\omega^{10}\cos.10\omega
\end{array}$$

etc.;

consequenter valor formulae propositae, scilicet $\cos.x\varphi$ sive $\cos.2$ quentem seriem satis concinnam exprimetur:

$$\cos.2x\omega = \begin{cases}
1 - \ \ 2\left(\frac{x}{1}\right)\sin.\omega\sin.\ \omega - \ \ 4\left(\frac{x}{2}\right)\sin.\omega^2\cos.2\\
+ \ \ 8\left(\frac{x}{3}\right)\sin.\omega^3\sin.3\omega + \ 16\left(\frac{x}{4}\right)\sin.\omega^4\cos.4\\
- \ 32\left(\frac{x}{5}\right)\sin.\omega^5\sin.5\omega - \ 64\left(\frac{x}{6}\right)\sin.\omega^6\cos.6\\
+128\left(\frac{x}{7}\right)\sin.\omega^7\sin.7\omega + 256\left(\frac{x}{8}\right)\sin.\omega^8\cos.8\\
\text{etc.}
\end{cases}$$

7. Antequam hanc formulam maxime generalem ad casus particulares ...nodemus, observationem prorsus singularem eamque maximi momenti ...lium attulisse operae pretium est inde petitam, quod per evolutionem ...nem sit

$$\cos.x\varphi = 1 - \frac{1}{2}x^2\varphi^2 + \frac{1}{24}x^4\varphi^4 - \frac{1}{720}x^6\varphi^6 + \text{etc.}.$$

...ntum potestates pares ipsius x occurrunt; quam ob rem necesse est, ut ...stra serie inventa facta evolutione characterum $\left(\frac{x}{n}\right)$ omnes termini po...bus imparibus ipsius x affecti seorsim se mutuo destruant; quare etiam termini inde resultantes sola littera x affecti iunctimque sumti nihilo ...ri debebunt, unde istos terminos ex singulis characteribus oriundos hic ...amus:

$$\begin{array}{llll}
\ldots) \text{ dat } + x, & \left(\frac{x}{2}\right) \text{ dat } -\frac{1}{2}x, & \left(\frac{x}{3}\right) \text{ dat } +\frac{1}{3}x, & \left(\frac{x}{4}\right) \text{ dat } -\frac{1}{4}x, \\
\ldots) \ \cdot\ \cdot \ +\frac{1}{5}x, & \left(\frac{x}{6}\right) \ \cdot\ \cdot \ -\frac{1}{6}x, & \left(\frac{x}{7}\right) \ \cdot\ \cdot \ +\frac{1}{7}x, & \left(\frac{x}{8}\right) \ \cdot\ \cdot \ -\frac{1}{8}x, \\
\ldots) \ \cdot\ \cdot \ +\frac{1}{9}x, & \left(\frac{x}{10}\right) \ \cdot\ \cdot \ -\frac{1}{10}x, & \left(\frac{x}{11}\right) \ \cdot\ \cdot \ +\frac{1}{11}x, & \left(\frac{x}{12}\right) \ \cdot\ \cdot \ -\frac{1}{12}x
\end{array}$$

etc.

8. Colligamus igitur omnes istos terminos ac dividendo per x pervenie...d sequentem seriem maxime memorabilem:

$$0 = -2\sin.\omega\sin.\omega + \frac{1}{2}\cdot 2^2\sin.\omega^2\cos.2\omega + \frac{1}{3}\cdot 2^3\sin.\omega^3\sin.3\omega$$

$$\ldots\frac{1}{4}\cdot 2^4\sin.\omega^4\cos.4\omega - \frac{1}{5}\cdot 2^5\sin.\omega^5\sin.5\omega + \frac{1}{6}\cdot 2^6\sin.\omega^6\cos.6\omega + \text{etc.},$$

... duas series inter se aequales deducimus, quae sunt

$$2\sin.\omega\sin.\omega - \frac{1}{3}\cdot 2^3\sin.\omega^3\sin.3\omega + \frac{1}{5}\cdot 2^5\sin.\omega^5\sin.5\omega - \text{etc.}$$

$$\ldots\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin.\omega^2\cos.2\omega - \frac{1}{4}\cdot 2^4\sin.\omega^4\cos.4\omega + \frac{1}{6}\cdot 2^6\sin.\omega^6\cos.6\omega - \text{etc.}$$

...ergo pulcherrimum theorema condi potest:

THEOREMA

Denotante ω angulum quemcunque duae sequentes series

$$s = \frac{2}{1}\sin.\omega\ \sin.\ \omega - \frac{2^3}{3}\sin.\omega^3 \sin.3\omega + \frac{2^5}{5}\sin.\omega^5 \sin.5\omega - \text{etc.}$$

$$t = \frac{2^2}{2}\sin.\omega^2 \cos.2\omega - \frac{2^4}{4}\sin.\omega^4 \cos.4\omega + \frac{2^6}{6}\sin.\omega^6 \cos.6\omega - \text{etc.}$$

semper erunt inter se aequales, sive erit $s = t$.

DEMONSTRATIO

19. Hic ubique loco $2\sin.\omega$ scribamus litteram b, ut sit

$$s = \frac{b\sin.\omega}{1} - \frac{b^3\sin.3\omega}{3} + \frac{b^5\sin.5\omega}{5} - \frac{b^7\sin.7\omega}{7} + \text{etc.},$$

$$t = \frac{b^2\cos.2\omega}{2} - \frac{b^4\cos.4\omega}{4} + \frac{b^6\cos.6\omega}{6} - \frac{b^8\cos.8\omega}{8} + \text{etc.},$$

quarum serierum summas investigemus nullo habito respectu ad re quae inter litteras b et ω intercedit, quam ob rem nihil impediet, c littera b tanquam constans spectetur; utriusque autem summa inven restituemus valorem assumtum $2\sin.\omega$, atque videbimus hoc casu futurum esse $t = s$.

20. Incipiamus igitur a serie priore, de qua observemus sumt $\omega = 0$ fore etiam $s = 0$, atque differentiata hac serie reperiemus for

$$\frac{\partial s}{\partial\omega} = b\cos.\omega - b^3\cos.3\omega + b^5\cos.5\omega - b^7\cos.7\omega + \text{etc.},$$

quae multiplicetur per $1 + 2bb\cos.2\omega + b^4$; atque ob

$$2\cos.2\omega\cos.n\omega = \cos.(n+2)\omega + \cos.(n-2)\omega$$

obtinebimus sequentem aequationem:

$$\frac{\partial s}{\partial \omega}(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4)$$

$$= b\cos.\omega - b^3\cos.3\omega + b^5\cos.5\omega - b^7\cos.7\omega + b^9\cos.9\omega - \text{etc.}$$

$$+ b^3\cos.3\omega - b^5\cos.5\omega + b^7\cos.7\omega - b^9\cos.9\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^5\cos.\ \omega - b^5\cos.\ \omega + b^7\cos.3\omega - b^9\cos.5\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^5\cos.\ \omega - b^7\cos.3\omega + b^9\cos.5\omega - \text{etc.},$$

us terminis collectis nanciscemur

$$\frac{\partial s}{\partial \omega}(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4) = b\cos.\omega + b^3\cos.\omega = b(1 + bb)\cos.\omega$$

ac erit

$$\partial s = \frac{b(1 + bb)\partial\omega\cos.\omega}{1 + 2bb\cos.2\omega + b^4}.$$

21. Simili modo tractemus alteram seriem, de qua notasse iuvabit sumto 0 fore

$$t = \frac{1}{2}l(1 + bb),$$

sit

$$t = \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^6}{6} - \frac{b^8}{8} + \text{etc.}$$

a iam differentiatione prodibit

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} = -bb\sin.2\omega + b^4\sin.4\omega - b^6\sin.6\omega + \text{etc.}$$

iam iterum utrinque multiplicetur per $1 + 2bb\cos.2\omega + b^4$ et calculus ita netur:

$$1\cdot\frac{\partial t}{\partial \omega} = -bb\sin.2\omega + b^4\sin.4\omega - b^6\sin.6\omega + b^8\sin.8\omega - \text{etc.},$$

$$2b^2\cos.2\omega\cdot\frac{\partial t}{\partial \omega} = \quad - b^4\sin.4\omega + b^6\sin.6\omega - b^8\sin.8\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^6\sin.2\omega - b^8\sin.4\omega + \text{etc.}$$

$$+ b^4\cdot\frac{\partial t}{\partial \omega} = \quad - b^6\sin.2\omega + b^8\sin.4\omega - \text{etc.},$$

unde collectis membris nascitur haec aequatio:

$$\frac{\partial t}{\partial \omega}(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4) = -bb\sin.2\omega;$$

consequenter erit

$$\partial t = -\frac{bb\partial\omega\sin.2\omega}{1 + 2bb\cos.2\omega + b^4}.$$

22. Inventis his duabus formulis differentialibus utrinsque investigemus, ac pro priore quidem ob

$$\partial\omega\cos.\omega = \partial\cdot\sin.\omega$$

habebimus

$$\partial s = \frac{b(1+bb)\partial\cdot\sin.\omega}{1 + 2bb\cos.2\omega + b^4},$$

quae expressio ob

$$\cos.2\omega = 1 - 2\sin.\omega^2$$

transformatur in hanc

$$\partial s = \frac{b(1+bb)\partial\cdot\sin.\omega}{(1+bb)^2 - 4bb\sin.\omega^2}.$$

Quia vero constat esse

$$\int\frac{\partial z}{ff - ggzz} = \frac{1}{2fg}\,l\,\frac{f+gz}{f-gz},$$

nostro autem casu sit $f = 1 + bb$ et $g = 2b$ et $z = \sin.\omega$, integrale:

$$s = \frac{1}{4}\,l\,\frac{1 + bb + 2b\sin.\omega}{1 + bb - 2b\sin.\omega},$$

quae formula casu $\omega = 0$ evanescit ideoque constantis additio

23. Pro altera formula ob

$$-\partial\omega\sin.2\omega = \frac{1}{2}\partial\cdot\cos.2\omega$$

ubi numerator aequatur quartae parti differentialis denominatoris, unde
grale erit

$$t = \frac{1}{4}\, l\,(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4).$$

Necesse autem est, ut posito $\omega = 0$ fiat

$$t = \frac{1}{2}\, l(1 + bb),$$

atque commode hic evenit, ut isto casu idem valor prodeat, sicque adie
constantis non est opus. Notasse autem hic iuvabit esse etiam

$$t = \frac{1}{4}\, l\,(1 + bb + 2b\sin.\omega) + \frac{1}{4}\, l\,(1 + bb - 2b\sin.\omega).$$

24. His iam integralibus inventis ob

$$s = \frac{1}{4}\, l\,(1 + bb + 2b\sin.\omega) - \frac{1}{4}\, l\,(1 + bb - 2b\sin.\omega)$$

erit eorum differentia

$$t - s = \frac{1}{2}\, l(1 + bb - 2b\sin.\omega).$$

At vero pro casu nostri theorematis est $b = 2\sin.\omega$, quo valore subs
prodit $t - s = \frac{1}{2}\, l\,1 = 0$, quae est demonstratio nostri theorematis.

EXEMPLUM 1

25. Contemplemur nunc etiam nonnullos casus particu
quidem, si sumeremus $\omega = 180^0$, omnes plane termini in
Quamobrem incipiamus a casu $\omega = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, ubi ergo erit

$$\cos.2\omega = -1, \quad \cos.4\omega = +1, \quad \cos.6\omega = -1, \quad \cos.8\omega =$$

$$\sin.\ \omega = +1, \quad \sin.3\omega = -1, \quad \sin.5\omega = +1, \quad \sin.7\omega -$$

quamobrem series pro $\cos.x\pi$ inventa erit

$$\cos.x\pi = 1 - 2\left(\frac{x}{1}\right) + 4\left(\frac{x}{2}\right) - 8\left(\frac{x}{3}\right) + 16\left(\frac{x}{4}\right) - 32\left(\frac{x}{5}\right.$$

quae series manifesto nascitur ex evolutione potestatis $(1-2)$
valores sunt alternatim $+1$ et -1, id quod egregie conven
$\cos.x\pi$, siquidem ipsi x tribuantur numeri integri.

26. Hoc autem casu binae illae series, quas inter se ac
invenimus, erunt

$$2 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{5}\cdot 2^5 + \frac{1}{7}\cdot 2^7 + \text{etc.} = -\frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{6}$$

Cum autem haec series maxime sit divergens, nullum cons
cum veritate expectare licet, quod quidem maxime paradoxon
novimus utique dari eiusmodi series divergentes omnes te
habentes, quarum summa tamen non solum sit nulla sed ad
torum veritas in superiore theoremate iam solidissime est de

EXEMPLUM 2

27. Sumatur nunc $\omega = 60^0 = \frac{\pi}{3}$, erit $2\sin.\omega = b = \sqrt{3}$,
Tum vero erit

$$\sin.3\omega = 0, \quad \sin.5\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin.7\omega = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin.9$$

$$\cos.2\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos.4\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos.6\omega = 1, \quad \cos.8\omega =$$

ergo sequentem nanciscimur seriem[1]):

$$\cos.\frac{2\pi x}{3} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{27}{2}\left(\frac{x}{5}\right) - 27\left(\frac{x}{6}\right)$$

$$+ \frac{81}{2}\left(\frac{x}{7}\right) - \frac{81}{2}\left(\frac{x}{8}\right) + \text{etc.}$$

autem binae series pro s et t inventae hoc casu erunt

$$s = \frac{3}{2} - \frac{27}{2\cdot 5} - \frac{81}{2\cdot 7} + \frac{729}{2\cdot 11} + \frac{2187}{2\cdot 13} - \text{etc.}$$

$$2s = 3^1 - \frac{3^3}{5} - \frac{3^4}{7} + \frac{3^6}{11} + \frac{3^7}{13} - \frac{3^9}{17} - \frac{3^{10}}{19} + \text{etc.},$$

vero

$$t = -\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{9}{2\cdot 4} + \frac{27}{1\cdot 6} + \frac{81}{2\cdot 8} - \frac{243}{2\cdot 10} - \frac{729}{1\cdot 12} - \text{etc.}$$

$$2t = -\frac{3^1}{2} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^4}{8} - \frac{3^5}{10} - \frac{3^6}{6} - \text{etc.},$$

ergo duae series certe sunt aequales, etiamsi hoc absurdum videri queat, rei causa in eo est quaerenda, quod hae series sunt divergentes.

EXEMPLUM 3

28. Sumatur $\omega = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, eritque $\sin.\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque $b = \sqrt{2}$. Porro notetur esse

$$\sin.3\omega = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin.5\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin.7\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin.9\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{etc.},$$

$$\cos.2\omega = 0,\quad \cos.4\omega = -1,\quad \cos.6\omega = 0,\quad \cos.8\omega = +1\ \text{etc.},$$

1) Editio princeps:

$$x = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{27}{2}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{27}{2}\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{81}{2}\left(\frac{x}{7}\right) - \frac{81}{2}\left(\frac{x}{8}\right) + \text{etc.}$$ C. B.

unde series nostra principalis erit

$$\cos. \frac{\pi x}{2} = 1 - \left(\frac{x}{1}\right) + 2\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(\frac{x}{4}\right) + 4\left(\frac{x}{5}\right) - 8\left(\frac{x}{7}\right) +$$

Haec autem series adhuc est divergens. Illae autem duae aequales esse ostendimus, ita se habebunt:

$$s = 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{8}{7} + \frac{16}{9} - \frac{32}{11} - \frac{64}{13}$$

$$t = \frac{4}{4} - \frac{16}{8} + \frac{64}{12} - \frac{256}{16} + \frac{1024}{20} - \frac{4096}{24} + \frac{16384}{28}$$

sive

$$s = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} - \frac{2^5}{11} - \frac{2^6}{13} + \text{etc.}$$

$$t = \frac{4}{4} - \frac{4^2}{8} + \frac{4^3}{12} - \frac{4^4}{16} + \frac{4^5}{20} - \frac{4^6}{24} + \frac{4^7}{28} - \text{etc.}$$

ubi nihil absoni occurit.

EXEMPLUM 4

29. Sit denique $\omega = 30° = \frac{\pi}{6}$, unde ob $\sin. \omega = \frac{1}{2}$ eri casus ad series convergentes perducet. Est vero

$$\sin. 3\omega = 1, \quad \sin. 5\omega = \frac{1}{2}, \quad \sin. 7\omega = -\frac{1}{2}, \quad \sin. 9\omega = -1,$$

$$\cos. 2\omega = \frac{1}{2}, \quad \cos. 4\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos. 6\omega = -1, \quad \cos. 8\omega = -\frac{1}{2},$$

etc.

Hinc ergo nostra series erit

$$\cos. \frac{\pi x}{3} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{5}\right) +$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8}\right) + \left(\frac{x}{9}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{11}\right) + \text{etc.},$$

ae expressio commode in ternas sequentes series decomponitur:

$$\cos.\frac{\pi x}{3} = \left\{\begin{array}{l} \quad\quad 1\left(1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{6}\right) + \left(\frac{x}{9}\right) + \left(\frac{x}{12}\right) + \text{etc.}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{1}\right) + \left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{7}\right) + \left(\frac{x}{10}\right) + \left(\frac{x}{13}\right) + \text{etc.}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{5}\right) + \left(\frac{x}{8}\right) + \left(\frac{x}{11}\right) + \left(\frac{x}{14}\right) + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

uae autem series s et t hoc casu erunt

$$s = \frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2\cdot 11} + \frac{1}{2\cdot 13} - \text{etc.}$$

$$t = \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot 8} + \frac{1}{2\cdot 10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2\cdot 14} + \text{etc.}$$

nc ergo erit

$$2(s-t) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{2}{12} + \text{etc.}$$

ncque seriem, cuius summa est $= 0$, hoc modo in tres series resolvere licet:

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \quad\quad \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \text{etc.} \\ -1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \text{etc.}\right) \\ -2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

30. Eodem plane modo, quo supra seriem pro $\cos. 2x\omega$ investigavimus, m series pro sinu eiusdem anguli multipli eruitur sequenti modo. Finga- ut supra, haec series:

$$\sin. x\varphi = \left(\frac{x}{1}\right)A + \left(\frac{x}{2}\right)B + \left(\frac{x}{3}\right)C + \text{etc.},$$

quae semper abrumpitur, quoties x denotat numerum integrum p
Evolvendo autem, ut iam supra fecimus, litterae A, B, C etc. ita re
expressae, ut facile pateat characteri $\left(\frac{x}{n}\right)$ respondere seriem

$$N = \sin. n\varphi - \left(\frac{n}{1}\right) \sin. (n-1)\varphi + \left(\frac{n}{2}\right) \sin. (n-2)\varphi - \text{etc.}$$

postremo membro existente $\pm \sin. 0\varphi$.

31. Cum iam sit

$$\sin. \lambda\varphi = \frac{p^\lambda - q^\lambda}{2\sqrt{-1}},$$

erit

$$2N\sqrt{-1} = \left\{\begin{array}{l} + p^n - \left(\frac{n}{1}\right)p^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)p^{n-2} - \text{etc.} = \quad (p-1)^n \\ - q^n + \left(\frac{n}{1}\right)q^{n-1} - \left(\frac{n}{2}\right)q^{n-2} + \text{etc.} = -(q-1)^n \end{array}\right\}$$

At vero ex superioribus manifestum est fore

$$p - 1 = \quad 2 \sin. \omega \sqrt{-1} (\cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega),$$

$$q - 1 = -2 \sin. \omega \sqrt{-1} (\cos. \omega - \sqrt{-1} \sin. \omega)$$

ideoque

$$2N\sqrt{-1} = (\quad 2 \sin. \omega \sqrt{-1})^n (\cos. n\omega + \sqrt{-1} \sin. n\omega)$$

$$-(-2 \sin. \omega \sqrt{-1})^n (\cos. n\omega - \sqrt{-1} \sin. n\omega),$$

ubi notandum pro quatuor formis, quas littera n habere potest, fore

Si $n = 4i$, $\quad N = \quad (2 \sin. \omega)^n \sin. n\omega$,

.. $n = 4i + 1$, $\quad N = \quad (2 \sin. \omega)^n \cos. n\omega$,

.. $n = 4i + 2$, $\quad N = -(2 \sin. \omega)^n \sin. n\omega$,

.. $n = 4i + 3$, $\quad N = -(2 \sin. \omega)^n \cos. n\omega$.

32. Quodsi igitur successive litterae n tribuantur valores 1, 2, 3, 4 etc., erit

$$A = +2 \sin.\omega \cos.\ \omega, \quad B = -2^2 \sin.\omega^2 \sin.2\omega,$$

$$C = -2^3 \sin.\omega^3 \cos.3\omega, \quad D = +2^4 \sin.\omega^4 \sin.4\omega,$$

$$E = +2^5 \sin.\omega^5 \cos.5\omega, \quad F = -2^6 \sin.\omega^6 \sin.6\omega,$$

$$G = -2^7 \sin.\omega^7 \cos.7\omega, \quad H = +2^8 \sin.\omega^8 \sin.8\omega$$

etc.;

sequenter series quaesita pro sinu restituto loco φ valore 2ω ita se habebit:

$$\sin.2x\omega = \left\{\begin{array}{l} +\ \ 2\left(\frac{x}{1}\right)\sin.\omega \cos.\ \omega - \ \ 4\left(\frac{x}{2}\right)\sin.\omega^2 \sin.2\omega \\ -\ \ 8\left(\frac{x}{3}\right)\sin.\omega^3 \cos.3\omega + \ 16\left(\frac{x}{4}\right)\sin.\omega^4 \sin.4\omega \\ +\ 32\left(\frac{x}{5}\right)\sin.\omega^5 \cos.5\omega - \ 64\left(\frac{x}{6}\right)\sin.\omega^6 \sin.6\omega \\ -128\left(\frac{x}{7}\right)\sin.\omega^7 \cos.7\omega + 256\left(\frac{x}{8}\right)\sin.\omega^8 \sin.8\omega \\ \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

COMMENTATIO
IN FRACTIONEM CONTINUAM
QUA ILLUSTRIS LA GRANGE POTESTA
BINOMIALES EXPRESSIT[1]

Conventui exhibuit die 20. Martii 1780

Commentatio 750 indicis ENESTROEMIANI

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 6 (1813/14), 181

1. Iste vir illustris hanc potestatem binomialem $(1+x)^n$ m
singulari ex eius differentiali logarithmico in hanc fractionem
vertit:

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(1-n)x}{2 + \cfrac{(1+n)x}{3 + \cfrac{(2-n)x}{2 + \cfrac{(2+n)x}{5 + \cfrac{(3-n)x}{2 + \cfrac{(3+n)x}{7 + \text{etc.}}}}}}}}$$

quae expressio hac insigni proprietate gaudet, ut, quoties exp
numerus integer, sive positivus sive negativus, abrumpatur
finitam redigatur.

1) Vide LAGRANGE, J.-L., *Sur l'usage des fractions continues dans le c*
(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de B*
Oeuvres de LAGRANGE, Tome quatrième, Paris 1869, p. 301—332.

2. Quoniam haec fractio continua non lege uniformi, sed interrupta, pr
reditur, eam ad legem uniformem revocemus, id quod commodissime fiet,
am sequenti modo per partes repraesentemus:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{A},$$

$$A = 1 + \cfrac{(1-n)x}{2 + \cfrac{(1+n)x}{B}},$$

$$B = 3 + \cfrac{(2-n)x}{2 + \cfrac{(2+n)x}{C}},$$

$$C = 5 + \cfrac{(3-n)x}{2 + \cfrac{(3+n)x}{D}},$$

$$D = 7 + \cfrac{(4-n)x}{2 + \cfrac{(4+n)x}{E}},$$

etc.

Hinc igitur per reductionem habebimus

$$A = 1 + \frac{(1-n)Bx}{2B+(1+n)x} = 1 + \frac{(1-n)x}{2} - \frac{(1-nn)xx:2}{2B+(1+n)x}$$

$$= 1 + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(nn-1)xx:4}{B+\left(\frac{1+n}{2}\right)x}.$$

mili modo erit

$$B = 3 + \frac{(2-n)Cx}{2C+(2+n)x} = 3 + \frac{(2-n)x}{2} - \frac{(4-nn)xx:2}{2C+(2+n)x}$$

$$= 3 + \frac{(2-n)x}{2} + \frac{(nn-4)xx:4}{C+\left(\frac{2+n}{2}\right)x}.$$

odem modo habebimus

$$C = 5 + \frac{(3-n)Dx}{2D+(3+n)x} = 5 + \frac{(3-n)x}{2} - \frac{(9-nn)xx:2}{2D+(3+n)x}$$

$$= 5 + \frac{(3-n)x}{2} + \frac{(nn-9)xx:4}{D+\left(\frac{3+n}{2}\right)x}$$

ita porro.

3. Quodsi iam hos valores ordine loco A, B, C etc. substituam[...] tio continua sequentem induet formam:

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(1-n)x}{2} + \cfrac{(nn-1)xx:4}{3(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-4)xx:4}{5(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-9)xx:4}{7(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-}{\dots}}}}}$$

4. Quo hinc fractiones partiales abigamus, statuamus $x = 2y$, [...] ciscamur hanc expressionem:

$$(1+2y)^n = 1 + \cfrac{2ny}{1+(1-n)y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \cfrac{(nn-9)yy}{7(1+y) + \text{et}}}}}$$

quae forma facile transmutatur in hanc:

$$\frac{2ny}{(1+2y)^n - 1} = 1 + (1-n)y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \text{etc.}}}$$

Addatur utrinque ny, ut producat

$$\frac{ny(1+(1+2y)^n)}{(1+2y)^n - 1} = 1 + y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \text{etc.}}}$$

quae expressio iam ordine satis regulari procedit.

5. Dividamus iam utrinque per $1+y$, et membrum sinistrum ev[...]

$$\frac{ny}{1+y} \cdot \frac{(1+2y)^n + 1}{(1+2y)^n - 1}.$$

Ex parte dextra autem singulae fractiones supra et infra per $1+y$ [...] tur prodibitque haec forma:

$$1 + \cfrac{(nn-1)yy:(1+y)^2}{3 + \cfrac{(nn-4)yy:(1+y)^2}{5 + \cfrac{(nn-9)yy:(1+y)^2}{7 + \cfrac{(nn-16)yy:(1+y)^2}{9 + \cfrac{(nn-25)yy:(1+y)^2}{11 + \text{etc.}}}}}}$$

6. Hanc igitur expressionem denuo ad maiorem concinnitatem reduc statuendo $\frac{y}{1+y}=z$, ita ut sit $y=\frac{z}{1-z}$. Hoc autem modo membrum strum ob

$$1+2y=\frac{1+z}{1-z}$$

accipiet hanc formam:

$$\frac{nz[(1+z)^n+(1-z)^n]}{(1+z)^n-(1-z)^n},$$

quod ergo aequabitur huic fractioni continuae:

$$1+\cfrac{(nn-1)zz}{3+\cfrac{(nn-4)zz}{5+\cfrac{(nn-9)zz}{7+\cfrac{(nn-16)zz}{9+\text{etc.}}}}}$$

quae, ob elegantiam, summam attentionem meretur.

7. Nunc igitur per se manifestum est istam expressionem semper al abrumpi, quoties n fuerit numerus integer, sive positivus sive negat Evidens autem est etiam membrum sinistrum eundem valorem retinere iamsi pro n scribatur $-n$. Hoc enim facto evadet

$$\frac{-nz[(1+z)^{-n}+(1-z)^{-n}]}{(1+z)^{-n}-(1-z)^{-n}},$$

quae fractio, si supra et infra per $(1-zz)^n$ multiplicetur, induet hanc forn

$$\frac{-nz[(1-z)^n+(1+z)^n]}{(1-z)^n-(1+z)^n}=\frac{nz[(1+z)^n+(1-z)^n]}{(1+z)^n-(1-z)^n},$$

quae est ipsa expressio praecedens. Sicque perinde est, sive litterae n positivus sive negativus tribuatur.

8. Ita si sumamus $n=\pm 1$, fit membrum sinistrum $=1$, qui etian valor dextri. Porro posito $n=\pm 2$ membrum sinistrum evadit $=1$ membrum vero dextrum fit etiam $=1+zz$. Simili modo sumto $n=$ pars sinistra, ut et dextra, fiunt $\frac{3(1+3zz)}{3+zz}$.

9. Hinc autem nonnullas conclusiones maximi momen
prouti exponenti n tribuatur valor vel evanescens vel in
autem casus, quo litterae z datur valor imaginarius, perd
conclusionem, quandoquidem ipsa fractio continua nihilomi
a qua igitur conclusione initium sumamus.

CONCLUSIO I

QUA $z = t\sqrt{-1}$

10. Hoc igitur casu fractio continua hanc habebit form

$$1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \cfrac{(nn-16)tt}{9 - \text{etc.}}}}}$$

at vero pars sinistra nunc erit

$$\frac{nt\sqrt{-1}[(1+t\sqrt{-1})^n + (1-t\sqrt{-1})^n]}{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n},$$

quae non obstantibus partibus imaginariis certe habere debe
quem ergo hic investigemus. Hunc in finem ponamus $t =$
$t = \text{tang.}\,\varphi$; tum igitur erit

$$(1+t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)^n}{\cos.\varphi^n} = \frac{\cos.n\varphi + \sqrt{-}}{\cos.\varphi}$$

similique modo

$$(1-t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)^n}{\cos.\varphi^n} = \frac{\cos.n\varphi - \sqrt{-}}{\cos.\varphi^n}$$

His igitur valoribus substitutis nostrum membrum sinistrun

$$\frac{2n\sqrt{-1}\cdot\text{tg.}\,\varphi\cos.n\varphi}{2\sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi} = \frac{n\,\text{tg.}\,\varphi\cos.n\varphi}{\sin.n\varphi} = \frac{n\,\text{tg.}\,\varphi}{\text{tg.}\,n\varphi}$$

$$\frac{nt}{\operatorname{tg.} n\varphi} = 1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}$$

gitur hoc modo repraesentari poterit:

$$\operatorname{tg.} n\varphi = \cfrac{nt}{1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}}$$

rgo expressio commode adhiberi potest ad tangentes angulorum multi- per tangentem anguli simplicis t exprimendas. Ita si fuerit $n = 2$, mus

$$\operatorname{tg.} 2\varphi = \frac{2t}{1 - tt}.$$

modo si $n = 3$, erit

$$\operatorname{tg.} 3\varphi = \cfrac{3t}{1 - \cfrac{8tt}{3 - tt}} = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}.$$

c casus maxime notabilis se offert quando exponens n accipitur in- arvus; tum enim erit $\operatorname{tg.} n\varphi = n\varphi$, ergo utrinque per n dividendo ista forma:

$$\varphi = \cfrac{t}{1 + \cfrac{tt}{3 + \cfrac{4tt}{5 + \cfrac{9tt}{7 + \text{etc.}}}}}$$

ctione continua per tangentem t ipse angulus exprimitur.

Consideremus nunc casum, quo exponens n accipitur infinite magnus angulus φ infinite parvus ideoque etiam eius tangens t infinite parva,

ita tamen, ut sit $n\varphi = \theta$ ideoque etiam $nt = \theta$; tum igitur
fractionem continuam[1]):

$$\operatorname{tg.}\theta = \cfrac{\theta}{1 - \cfrac{\theta\theta}{3 - \cfrac{\theta\theta}{5 - \cfrac{\theta\theta}{7 - \text{etc.}}}}}$$

qua formula ex dato angulo θ eius tangens determinari p
expressio tanquam reciproca praecedentis spectari potest.

CONCLUSIO II

QUA EXPONENS n EVANESCENS ASSUMITUR

13. Hoc ergo casu fractio continua erit

$$1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \cfrac{9zz}{7 - \cfrac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}}$$

Pro parte sinistra autem notandum est esse

$$\frac{(1+z)^n - 1}{n} = l(1+z)$$

ideoque

$$(1+z)^n = 1 + nl(1+z);$$

simili modo erit

$$(1-z)^n = 1 + nl(1-z),$$

unde membrum sinistrum evadet

$$nz\frac{[2 + nl(1+z) + nl(1-z)]}{nl(1+z) - nl(1-z)} = \frac{2z}{l\frac{1+z}{1-z}};$$

1) Hanc fractionem continuam iam pridem a celeberrimo J. H. Lamb
de l'Académie de Berlin, année 1761 (1768) p. 268) *Eulerus* ipse su
tatione 594 (indicis Enestroemiani), *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I18,

ergo habebimus istam formam:

$$\frac{2z}{l\frac{1+z}{1-z}} = 1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \cfrac{9zz}{7 - \cfrac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}}$$

que ipse logarithmus sequenti modo exprimetur:

$$l\frac{1+z}{1-z} = \cfrac{2z}{1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \text{etc.}}}}$$

CONCLUSIO III

QUA SUMITUR EXPONENS n INFINITE MAGNUS

14. Hic ergo, ut fractio continua finitum sortiatur valorem, [quod fieri
nit,] nisi quantitas z infinite parva statuatur, ponatur $nz = v$, ut sit $z = \frac{v}{n}$,
e nostra fractio continua erit

$$1 + \cfrac{vv}{3 + \cfrac{vv}{5 + \cfrac{vv}{7 + \cfrac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

membro autem sinistro constat esse

$$\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n = e^v$$

lique modo

$$\left(1 - \frac{v}{n}\right)^n = e^{-v},$$

membrum sinistrum habebit hanc formam:

$$\frac{v(e^v + e^{-v})}{e^v - e^{-v}} = \frac{v(e^{2v} + 1)}{e^{2v} - 1};$$

quam ob rem habebimus hanc memorabilem fractionem cont

$$\frac{v(e^{2v}+1)}{e^{2v}-1} = 1 + \cfrac{vv}{3 + \cfrac{vv}{5 + \cfrac{vv}{7 + \cfrac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

cuius valor transcendens etiam hoc modo per series solitas

$$\frac{1 + \frac{vv}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots\cdots 6} + \text{etc.}}{1 + \frac{vv}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdots\cdots 5} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots\cdots 7} + \text{etc.}}$$

DE UNCIIS POTESTATUM BINOMII EARUMQUE INTERPOLATIONE[1]

Conventui exhibuit die 3. Decembris 1781.

Commentatio 768 indicis ENESTROEMIANI

émoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 9 (1819/20), 1824, p. 57—76

Evolutionem potestatis $(1+x)^n$ sequenti modo per idoneos characteres entemus:

$$(1+x)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \text{etc.},$$

isti characteres uncinulis inclusi

$$\left(\frac{n}{1}\right), \quad \left(\frac{n}{2}\right), \quad \left(\frac{n}{3}\right) \quad \text{etc.}$$

referant. Erit ergo

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n, \quad \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}, \quad \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} \quad \text{etc.}$$

n genere erit

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdots\cdots\frac{n-q+1}{q},$$

Confer hac cum dissertatione Commentationes 19 et 421 indicis ENESTROEMIANI: *LEON-* *LERI Opera omnia*, vol. I_{14}, p. 1 et vol. I_{17}, p. 316. C. B.

negativi accipiuntur. Ceterum pro casu $q = 0$ per se ma[...]
$\binom{n}{0} = 1$, siquidem hinc primus terminus potestatis evolutae

2. Cum ipsa evolutio potestatis $(1 + x)^n$ alias potestates
volvat, nisi quarum exponentes sint numeri integri positivi,
interpolationem admittit. Interim tamen si hanc formam $\binom{n}{q}$
tionem numerorum n et q spectemus, ita ut, si q conside[...]
cuiusdam curvae, eius applicata sit $\binom{n}{q}$, nullum est dubium,
quandam legem continuitatis sit habitura, quam ergo hic inv[...]
Principia autem interpolationis ex serie hypergeometrica W[...]

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720 \text{ etc.},$$

repetere conveniet, quandoquidem evolutio nostrorum chara[...]
finitate cum hac serie est praedita.

3. Quoniam quilibet terminus seriei hypergeometricae
volvitur: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot m$, eius loco brevitatis gratia scrib[...]
dem ista forma tanquam certa functio ipsius m spectari [...]
interpolationem iam pridem[1]) docui atque demonstravi esse

$$\varphi : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{ et } \varphi : -\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

denotante π peripheriam circuli radio 1 descripti. At si al[...]
luti $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. sumantur, valores continuo altiores quantita[...]
requirunt; quamobrem, si nostros characteres ad huiusm[...]
revocaverimus, interpolatio nulla amplius laborat difficultat[...]

---

1) Confer Commentationem 19 indicis Eneströmiani, § 15 et § 21; [...]
tionem 421, § 16 et § 28: *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I14, p. 13 [...]
et 332. C. B.

PROBLEMA

4. *Valorem characteris $\binom{n}{q}$ ad terminos progressionis hypergeometricae rev*

SOLUTIO

Cum sit
$$\binom{n}{q} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot q},$$

at vero ex progressione hypergeometrica sit

$$\varphi : n = n(n-1)(n-2)\cdots 1,$$
ea ita referri potest:

$$\varphi : n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-q+1)\times(n-q)(n-q-1)\cdots 1,$$

unde patet numeratorem nostrae fractionis esse

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : (n-q)};$$

quamobrem, cum denominator sponte sit $\varphi : q$, valor nostri characteris $\binom{n}{q}$

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : q \times \varphi : (n-q)}.$$

COROLLARIUM

5. Quodsi ergo loco n scribamus $a+b$ et a loco q, habebimus
aequationem:
$$\binom{a+b}{a} = \frac{\varphi : (a+b)}{\varphi : a \times \varphi : b},$$

in qua formula litterae a et b permutationem admittunt; unde conclu
semper fore
$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

unde deduci possunt sequentia theoremata notatu maxime dign

THEOREMA 1

6. *Quicunque numeri pro a, b et n accipiantur, semper haec habebit:*

$$\left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{n-a}{b}\right)=\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{n-b}{a}\right).$$

DEMONSTRATIO

Loco n scribatur $a+b+c$, et cum sit per superiorem red

$$\left(\frac{a+b+c}{a}\right)=\frac{\varphi:(a+b+c)}{\varphi:a\times\varphi:(b+c)}$$

atque

$$\left(\frac{b+c}{b}\right)=\frac{\varphi:(b+c)}{\varphi:b\times\varphi:c},$$

productum fiet

$$\left(\frac{a+b+c}{a}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right)=\frac{\varphi:(a+b+c)}{\varphi:a\times\varphi:b\times\varphi:c},$$

unde patet litteras a, b, c pro lubitu inter se permutari poss $a+b+c$ restituto n erit

$$\left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{n-a}{b}\right)=\left(\frac{n}{b}\right)\left(\frac{n-b}{a}\right);$$

utraque enim pars aequalis est huic formae:

$$\frac{\varphi:n}{\varphi:a\times\varphi:b\times\varphi:c}.$$

THEOREMA 2

7. *Istud productum ex ternis characteribus*

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}$$

r eundem valorem retinet, utcunque litterae a, b, c inter se permutentur.

DEMONSTRATIO

Per reductionem enim ad seriem hypergeometricam habebimus

$$\binom{n}{a}=\frac{\varphi:n}{\varphi:a\times\varphi:(n-a)},\qquad \binom{n-a}{b}=\frac{\varphi:(n-a)}{\varphi:b\times\varphi:(n-a-b)},$$

$$\binom{n-a-b}{c}=\frac{\varphi:(n-a-b)}{\varphi:c\times\varphi:(n-a-b-c)},$$

productum propositum reducetur ad hanc formam:

$$\frac{\varphi:n}{\varphi:a\times\varphi:b\times\varphi:c\times\varphi:(n-a-b-c)},$$

expressio manifesto eundem retinet valorem, utcunque litterae a, b, c se permutentur, quod cum pluribus modis fieri possit, etiam plura huius- producta inter se aequalia exhiberi poterunt.

COROLLARIUM

3. Hoc modo ulterius progredi licet atque demonstrari poterit istud pro- m

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}\binom{n-a-b-c}{d}$$

tuo eundem valorem retinere, utcunque litterae a, b, c, d permutentur. enim valor semper erit

$$\frac{\varphi:n}{\varphi:a\times\varphi:b\times\varphi:c\times\varphi:d\times\varphi:(n-a-b-c-d)}.$$

THEOREMA 3

9. *Hoc productum:* $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$ *semper aequale est huic characteri:* $\left(\frac{0}{a-

DEMONSTRATIO

Cum enim sit per reductionem ad numeros hypergeometricos

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\varphi:a}{\varphi:b\times\varphi:(a-b)}$$

et

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\varphi:b}{\varphi:a\times\varphi:(b-a)},$$

manifesto est

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{\varphi:(a-b)\times\varphi:(b-a)}.$$

Tum vero simili modo erit

$$\left(\frac{0}{a-b}\right)=\frac{\varphi:0}{\varphi:(a-b)\times\varphi:(b-a)}=\frac{1}{\varphi:(a-b)\times\varphi:(b-a)}$$

ob $\varphi:0=1$, unde sequitur

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{0}{a-b}\right);$$

hincque patet hoc productum semper nihilo aequari, quoties $a-b$
merus integer.

SCHOLION

10. His praemissis sit $\left(\frac{P}{Q}\right)$ forma generalis omnium huius gener
tionum, quas hic evolvere constitui, ubi P et Q denotent numeros q
que, sive integros sive fractos sive negativos sive positivos, ita ut
formula infinities-infinita multitudo casuum contineatur, atque iam not
quoties denominator Q fuerit numerus integer positivus, evolutionem
semper institui posse; unde has formas: $\left(\frac{P}{i}\right)$ pro cognitis habebimus
que ope reliquos casus ad maiorem simplicitatem reducere conabim
quenti autem theoremate numerus omnium casuum ad semissem redig

THEOREMA 4

11. *Omnes casus huius formae:* $\left(\frac{P}{Q}\right)$ *facillime reducuntur ad casus, quibus*
Q *maior quam* $\frac{1}{2}P$.

DEMONSTRATIO

Ponatur enim $Q = \frac{1}{2}P - s$, et cum sit in genere

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{a-b}\right),$$

erit

$$\left(\frac{P}{\frac{1}{2}P - s}\right) = \left(\frac{P}{\frac{1}{2}P + s}\right)$$

sicque omnes casus, quibus Q superatur ab $\frac{1}{2}P$, prorsus congruunt cum i
quibus superat $\frac{1}{2}P$.

COROLLARIUM

12. Si ergo concipiatur curva, cuius abscissae x respondeat applica
$= \left(\frac{a}{x}\right)$, tum applicata abscissae $x = \frac{1}{2}a$ simul erit diameter curvae, quand
quidem binis abscissis $x = \frac{1}{2}a + t$ et $x = \frac{1}{2}a - t$ aequales respondent app
latae; unde sufficiet alteram tantum medietatem curvae determinasse.

SCHOLION

13. Cum igitur hoc modo omnes casus in formula $\left(\frac{P}{Q}\right)$ contenti ad s
missem redigantur, in sequentibus ostendam, quomodo intra multo arctior
limites compingi queant. Si scilicet litterae m et n denotent numeros integr
positivos, haec formula generalis: $\left(\frac{p \pm m}{q \pm n}\right)$ semper reduci potest ad hanc fo
mam: $M \cdot \left(\frac{p}{q}\right)$, ubi valor factoris M absolute assignari potest. Hoc igit
modo forma nostra generalis $\left(\frac{P}{Q}\right)$ semper redigi poterit ad talem: $\left(\frac{p}{q}\right)$, in q
numeri p et q intra limites 0 et 1 subsistant. Quin etiam redigi possent int
limites 0 et -1. Huic igitur reductioni inservient sequentia problemata, qu
rum solutiones his lemmatibus innituntur.

LEMMA 1

14. *Cum sit*

$$\binom{p+m}{m} = \frac{\varphi:(p+m)}{\varphi:m \times \varphi:p},$$

erit

$$\varphi:(p+m) = \varphi:m \times \varphi:p \times \binom{p+m}{m},$$

cuius characteris valor ob m numerum integrum positivum semper ab
poterit. Eodem igitur modo erit

$$\varphi:(q+n) = \varphi:n \times \varphi:q \times \binom{q+n}{n}.$$

LEMMA 2

15. *Cum sit*

$$\left(\frac{p}{m}\right) = \frac{\varphi:p}{\varphi:m \times \varphi:(p-m)},$$

concluditur fore

$$\varphi:(p-m) = \frac{\varphi:p}{\varphi:m} : \left(\frac{p}{m}\right).$$

Eodem modo erit

$$\varphi:(q-n) = \frac{\varphi:q}{\varphi:n} : \left(\frac{q}{n}\right).$$

PROBLEMA 1

16. *Hanc formulam:* $\left(\frac{p+m}{q}\right)$, *ubi m denotat numerum integr*
reducere ad hanc simpliciorem: $\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

Per reductionem nostram generalem ad numeros hypergeome

$$\left(\frac{p+m}{q}\right) = \frac{\varphi:(p+m)}{\varphi:q \times \varphi:(p-q+m)}.$$

si iam hic ex lemmate primo loco $\varphi:(p+m)$ et $\varphi:(p-q+m)$ valores situamus, prodibit

$$\binom{p+m}{q}=\frac{\varphi:p}{\varphi:q\times\varphi:(p-q)}\times\frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}}.$$

igitur sit

$$\frac{\varphi:p}{\varphi:q\times\varphi:(p-q)}=\binom{p}{q},$$

bimus

$$\binom{p+m}{q}=\frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}}\times\binom{p}{q}.$$

PROBLEMA 2

17. *Hanc formulam:* $\binom{p-m}{q}$, *ubi* m *sit numerus integer positivus, reducere ad* *m simpliciorem* $\binom{p}{q}$.

SOLUTIO

Reductio nostra statim praebet hanc aequationem:

$$\binom{p-m}{q}=\frac{\varphi:(p-m)}{\varphi:q\times\varphi:(p-q-m)}.$$

am loco $\varphi:(p-m)$ et $\varphi:(p-q-m)$ valores ex lemmate secundo sub-ntur, ac reperietur sequens expressio:

$$\binom{p-m}{q}=\frac{\varphi:p}{\varphi:q\times\varphi:(p-q)}\times\frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}},$$

cum sit

$$\frac{\varphi:p}{\varphi:q\times\varphi:(p-q)}=\binom{p}{q},$$

habebimus formam:

$$\binom{p-m}{q}=\frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}}\times\binom{p}{q}.$$

SOLUTIO

Reductio nostra hic praebet

$$\binom{p}{q+n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : (q+n) \times \varphi : (p-q-n)}.$$

Iam ex lemmate primo loco $\varphi : (q+n)$, ex secundo vero loco
valores substituantur prodibitque

$$\binom{p}{q+n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : q \times \varphi : (p-q)} \times \frac{\binom{p-q}{n}}{\binom{q+n}{n}} = \frac{\binom{p-q}{n}}{\binom{q+n}{n}} \times ($$

PROBLEMA 4

19. *Hanc formulam:* $\binom{p}{q-n}$, *ubi* n *denotet numerum integr*
formam simpliciorem $\binom{p}{q}$ *reducere.*

SOLUTIO

Per reductionem ad numeros hypergeometricos erit

$$\binom{p}{q-n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : (q-n) \times \varphi : (p-q+n)}.$$

Quodsi iam loco $\varphi : (q-n)$ ex lemmate secundo, at loco φ
lemmate primo valores substituantur, resultabit expressio

$$\binom{p}{q-n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : q \times \varphi : (p-q)} \times \frac{\binom{q}{n}}{\binom{p-q+n}{n}} = \frac{\binom{q}{n}}{\binom{p-q+n}{n}}$$

PROBLEMA 5

20. *Si fuerit*

$$\left(\frac{P}{Q}\right)=\left(\frac{p+m}{q+n}\right),$$

ius valorem ad hanc formam reducere: $M\left(\frac{p}{q}\right)$, ubi M absolute assignare lice nde quod m et n sint numeri integri positivi.

SOLUTIO

Ex problemate 1 invenimus

$$\left(\frac{p+m}{q}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right).$$

uodsi iam hic loco q ubique scribamus $q+n$, erit

$$\left(\frac{p+m}{q+n}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q-n+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q+n}\right).$$

lic loco $\left(\frac{p}{q+n}\right)$ valorem ex problemate 3 substituamus, quo facto fiet

$$\left(\frac{p+m}{q+n}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)\times\left(\frac{p-q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q-n+m}{m}\right)\times\left(\frac{q+n}{n}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right),$$

bi igitur erit

$$M=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)\times\left(\frac{p-q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q-n+m}{m}\right)\times\left(\frac{q+n}{n}\right)},$$

uius valorem ob m et n numeros integros positivos semper absolute as nare licebit.

PROBLEMA 6

21. *Si fuerit*

$$\left(\frac{P}{Q}\right)=\left(\frac{p+m}{q-n}\right),$$

eius valorem reducere ad formam $M\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

Ex problemate primo cum sit

$$\left(\frac{p+m}{q}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right),$$

hic ubique loco q scribatur $q-n$, ut prodeat

$$\left(\frac{p+m}{q-n}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+n+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q-n}\right),$$

atque hic loco $\left(\frac{p}{q-n}\right)$ valor ex problemate 4 substituatur, quo fa
nostra hanc impetrabimus expressionem:

$$\left(\frac{p+m}{q-n}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)\times\left(\frac{q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q+n+m}{m}\right)\times\left(\frac{p-q+n}{n}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right).$$

PROBLEMA 7

22. *Si fuerit*

$$\left(\frac{P}{Q}\right)=\left(\frac{p-m}{q+n}\right),$$

eius valorem reducere ad formam $M\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

In problemate 2 invenimus

$$\binom{p-m}{q}=\frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}}\times\binom{p}{q},$$

i si loco q scribamus $q+n$ orietur forma proposita

$$\binom{p-m}{q+n}=\frac{\binom{p-q-n}{m}}{\binom{p}{m}}\times\binom{p}{q+n}.$$

inc si ex problemate 3 loco $\binom{p}{q+n}$ valor substituatur, orietur expressio

$$\binom{p-m}{q+n}=\frac{\binom{p-q-n}{m}\times\binom{p-q}{n}}{\binom{p}{m}\times\binom{q+n}{n}}\times\binom{p}{q}.$$

PROBLEMA 8

23. *Si fuerit*

$$\binom{P}{Q}=\binom{p-m}{q-n},$$

is valorem ad formam simplicem $M\binom{p}{q}$ *reducere.*

SOLUTIO

Sumatur iterum ex problemate secundo expressio

$$\binom{p-m}{q}=\frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}}\times\binom{p}{q}$$

in eaque loco q scribatur $q - n$, ut obtin forma proposit

$$\left(\frac{p-m}{q-n}\right) = \frac{\left(\frac{p-q+n}{m}\right)}{\left(\frac{p}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q-n}\right),$$

unde, substituendo loco characteris $\left(\frac{p}{q-n}\right)$ eius valorem pr
tum, prodibit

$$\left(\frac{p-m}{q-n}\right) = \frac{\left(\frac{p-q+n}{m}\right) \times \left(\frac{q}{n}\right)}{\left(\frac{p}{m}\right) \times \left(\frac{p-q+n}{n}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right).$$

COROLLARIUM

24. Quoties igitur denominator Q fuerit numerus inte
sive negativus, tum loco q semper statui poterit 0, et q
talis formulae $\left(\frac{P}{Q}\right)$ per nostras reductiones semper absolut
quia in omnibus characteribus denominatores sunt vel m ve
integri. Tantum igitur superest, ut eos casus investigem
quaepiam fractio sive positiva sive negativa, quae [formula (
ad $\left(\frac{p}{q}\right)$, ubi q erit fractio simplicissima eiusdem generis
minor; quamobrem totum negotium eo redit, ut valor hu
indagetur, quando q est fractio. Pro his igitur casibus valo
per formulam quandam integralem exprimemus.

PROBLEMA

25. *Valorem formulae* $\left(\frac{p}{q}\right)$ *per formulam integralem expri*

SOLUTIO

Hunc in finem consideremus hanc formulam:

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^n,$$

s valor ab $x=0$ ad $x=1$ extensus designetur per $\triangle$; qui cum sit certa tio ipsius q, puta $f:q$, loco q hic scribamus $q+1$ et $\triangle' = f:(q+1)$;

$$\triangle - \triangle' = \int x^{q-1}\partial x (1-x)^{n+1};$$

ue modo ex quovis casu numeri n reperietur valor ipsius $\triangle$ pro casu 1. Incipiamus a casu $n=0$ et valores ipsius $\triangle$ pro sequentibus numeris a se habebunt:

n	$\triangle$
0	$\frac{1}{q}$
1	$\frac{1}{q(q+1)}$
2	$\frac{1\cdot 2}{q(q+1)(q+2)}$
3	$\frac{1\cdot 2\cdot 3}{q(q+1)(q+2)(q+3)}$

Hinc iam manifestum est fore in genere

$$\triangle = \frac{1}{q} \times \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cdots \cdot n}{(q+1)(q+2)(q+3)\cdots(q+n)}$$

Cum nunc sit

$$\binom{q+n}{n} = \frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n},$$

as est fore

$$\triangle = \frac{1}{q}:\binom{q+n}{n},$$

vicissim erit

$$\binom{q+n}{n} = \frac{1}{q\triangle}.$$

anc $q+n=p$ sive $n=p-q$, ut fiat

$$\binom{p}{n} = \binom{p}{p-n} = \binom{p}{q},$$

et cum iam sit

$$\Delta = \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q},$$

concludimus fore

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q}},$$

ita ut valor huius formulae integralis ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensu
ad valorem characteris $\left(\frac{p}{q}\right)$.

COROLLARIUM

26. Quaecunque ergo fractiones loco p et q substituantur, se
algebraica exhiberi potest, a cuius quadratura, eaque definita scili
$x = 1$, valor formulae $\left(\frac{p}{q}\right)$ pendeat.

SCHOLION 1

27. Analysis, qua hic usi sumus, videtur quidem tantum loc
casibus, quibus n est numerus integer positivus, neque ergo ad ca
$p - q$ est fractio, applicari posse. Verum ipsum principium c
applicationem ad numeros fractos satis confirmare videtur; inte
iuvabit consensus cum veritate in casu aliunde cognito ostendisse.
retur ergo haec formula: $\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$, ubi $p = 1$ et $q = \frac{1}{2}$, eritque per r
generalem

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\varphi : 1}{\varphi : \frac{1}{2} \times \varphi : \frac{1}{2}},$$

quae expressio, ob $\varphi : 1 = 1$ et $\varphi : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, evadit $\frac{4}{\pi}$. Nunc igitur
num ista expressio conveniat cum

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} (1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

At vero iste denominator posito $x = yy$ abit in

$$\int \partial y \sqrt{1-yy} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}} - \int \frac{yy\partial y}{\sqrt{1-yy}}.$$

Constat autem, his integralibus ab $y=0$ ad $y=1$ extensis, esse

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}}=\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad\int\frac{yy\partial y}{\sqrt{1-yy}}=\frac{\pi}{4},$$

ita ut differentia sit $\frac{\pi}{4}$, ideoque valor hic inventus $\frac{4}{\pi}$ egregie convenit cum praecedente.

SCHOLION 2

28. Quod autem ad formulam integralem $\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q}$ attinet, ex analysi patet eius valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extensum, finitum fieri non posse, nisi sit $q>0$ simulque $p-q>-1$. Quoniam vero in nostra potestate est istos numeros p et q, ad quos formulam generalem $\left(\frac{P}{Q}\right)$ reduximus, inter limites 0 et 1 redigere, formula integralis inventa semper ad omnes plane casus transferri poterit. Ceterum iam manifestum est casibus, quibus Q est numerus integer sive positivus sive negativus, evolutionem actu institui posse, hocque etiam succedet casibus, quibus $P-Q$ est numerus integer, unde usus nostrae formulae integralis erit amplissimus casibus, quibus neque Q neque $P-Q$ sunt integri. Casus maxime memorabilis hic occurrit, quando P est numerus integer sive positivus sive negativus; tum enim, quaecunque fractio pro Q accipiatur, valor huius expressionis $\left(\frac{P}{Q}\right)$ per peripheriam circuli assignari poterit.

PROBLEMA

29. *Valorem formulae $\left(\frac{P}{Q}\right)$, quoties P fuerit numerus integer sive positivus sive negativus, ad quadraturam circuli reducere.*

SOLUTIO

Quando P est numerus integer sive positivus sive negativus, ista formula semper reduci poterit ad hanc: $\left(\frac{0}{q}\right)$, ita ut $p=0$; sicque per formulam integralem erit

$$\left(\frac{0}{q}\right)=\frac{1}{q\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{-q}};$$

quamobrem hanc formulam integralem accuratius evolvamu
hanc formam:

$$\int\frac{\partial x}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^q$$

posito

$$\frac{x}{1-x}=z \quad \text{sive} \quad x=\frac{z}{1+z}$$

a $z=0$ usque ad $z=\infty$ extendi debet. Ob

$$\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial z}{z(1+z)}$$

vero formula transmutatur in hanc:

$$\int\frac{z^{q-1}\partial z}{1+z}.$$

At vero olim[1]) ostendi huius formulae integralis[2])

$$\int\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$$

valorem a $z=0$ ad $z=\infty$ extensum esse

$$\frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}}.$$

Nostro igitur casu erit $m=q$ et $n=1$, unde nostrum in
quo substituto habebimus

$$\left(\frac{0}{q}\right)=\frac{1}{\frac{q\pi}{\sin.q\pi}}=\frac{\sin.q\pi}{q\pi}.$$

---

1) Vide e. g. Commentationem 254 indicis ENESTROEMIANI, § 46, *[…]*
omnia, vol. I_{17}, p. 260. C. B.

2) Editio princeps: $\int\frac{z^{m-1}\partial z}{(1+z)^n}$; correxit C. B.

ula illa ob $\sin. q\pi = 0$ semper in nihilum abit solo casu excepto $q = 0$. unto autem q quasi infinite parvo ob $\sin. q\pi = q\pi$ erit utique

$$\left(\frac{0}{q}\right) = 1,$$

uemadmodum rei natura postulat.

COROLLARIUM

31. Cum per reductionem nostram generalem sit

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{\varphi : 0}{\varphi : q \times \varphi : -q},$$

b $\varphi : 0 = 1$ erit

$$\varphi : q \times \varphi : -q = \frac{q\pi}{\sin. q\pi},$$

a ut, quicumque valores ipsi q tribuantur, tam valores $\varphi : q$ quam $\varphi : -q$ d quantitates transcendentes superiorum generum referantur; interim tamen orum productum per quadraturam circuli exprimetur.

SCHOLION

32. Cum sit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q \int x^{q-1} \partial x (1-x)^{p-q}},$$

siquidem hoc integrale ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendatur, si istos valores in theoremátibus supra allatis circa relationem formularum $\left(\frac{p}{q}\right)$ substituamus, sequentia nanciscemur theoremata pro relatione formularum integralium, quae maximo videntur memorabilia.

THEOREMA

33. *Si sequentia integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, sen*
aequalitas subsistet:

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-a} \times \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-a-b}$$
$$= \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-b} \times \int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-b-a}.$$

COROLLARIUM

34. Si in talibus formulis exponens ipsius x evanescat, ut habe

$$\int \partial x (1-x)^p,$$

eius valor absolute assignari potest eritque $\frac{1}{p+1}$. At si expone
$1 - x$ evanescat, ut habeamus

$$\int x^p \partial x,$$

eius valor manifesto erit $\frac{1}{p+1}$; sin autem formula integralis fuerit

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^{-q},$$

eius valor, ut vidimus, erit $\frac{\pi}{\sin. q\pi}$, unde plures relationes notatu di
untur. Ceterum hic notasse iuvabit, exponentes ipsius x et $1-x$
permutari posse, ita ut semper sit

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \int x^q \partial x (1-x)^p.$$

THEOREMA

35. *Si omnia integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendantur, producti*
tribus formulis integralibus:

$$\int x^{a-1} \partial x (1-x)^{n-a} \times \int x^{b-1} \partial x (1-x)^{n-a-b} \times \int x^{c-1} \partial x (1-x)^{n-a-}$$

semper eundem valorem retinebit, quomodocunque litterae a, b, c inter se pe

THEOREMA

36. *Si omnia integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendantur, productum ex quatuor formulis integralibus semper eundem valorem retinebit, quomodocunque litter a, b, c, d inter se permutantur, scilicet*

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x)^{n-a} \times\int x^{b-1}\partial x(1-x)^{n-a-b}$$

$$\times\int x^{c-1}\partial x(1-x)^{n-a-b-c}\times\int x^{d-1}\partial x(1-x)^{n-a-b-c-d}.$$

COROLLARIUM

36a.[1]) Hic evidens est numerum talium formularum integralium contin ulterius augeri posse, unde numerus variationum, quae in singulis product locum habere possunt, in infinitum excrescet; ubi quidem observo, casu simplicissimum theorematis primi prorsus convenire cum iis, quae olim[2]) relatione inter diversas formulas integrales proposueram.

SCHOLION

37. Omnia illa integralia in hac forma generali continentur:

$$\int x^p\partial x(1-x)^q,$$

quam constat plurimis modis in alias formas transmutari posse, dum scilic binos exponentes p et q quovis numero integro sive augere sive minuere lice atque inter has diversas formas sine dubio simplicissima est ea, in qua is exponentes intra limites 0 et -1 deprimuntur, quam transformationem pe sequentes reductiones commodissime institui posse facile patet:

1) In editione principe numerus 36 per errorem bis occurrit. C. B.

2) Vide e. g. Commentationem 254 indicis ENESTROEMIANI, § 40; *LEONHARDI EULERI Oper omnia*, vol. I_{17}, p. 257. C. B.

$$\int x^p \partial x(1-x)^q = \frac{q}{p+q+1}\int x^p \quad \partial x(1-x)^{q-1},$$

$$\int x^p \partial x(1-x)^q = \frac{p+q+2}{q+1}\int x^p \quad \partial x(1-x)^{q+1}.$$

Saepenumero etiam haec reductio, qua binae praecedentium sin
insignem usum praestat:

$$p\int x^{p-1}\partial x(1-x)^q = q\int x^p \partial x(1-x)^{q-1}.$$

PROBLEMA

38. *Describere lineam curvam, cuius abscissae x respondeat ap
ubi m denotet numerum integrum positivum.*

SOLUTIO

Hic primo investigentur applicatae, quando abscissae x
tribuuntur, easque immediate ex forma $y = \left(\frac{m}{x}\right)$ facile definir

$$\left(\frac{m}{0}\right) = 1;\quad \left(\frac{m}{1}\right) = m;\quad \left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\quad \text{etc.},$$

donec perveniatur ad $x = m$, ubi iterum est $\left(\frac{m}{m}\right) = 1$. Praeter
omnes applicatae, quae respondent valoribus negativis ipsius
maioribus quam m, evanescunt. At vero iam observavimus
semper praeditam esse diametro, quem praebet applicata abs
respondens, unde sufficiet casus tantum evolvere, quibus $x >$

At si abscissae x valores fractos tribuamus, necesse est
lam $\left(\frac{m}{x}\right)$ ad hanc reducere: $\left(\frac{0}{x}\right)$, quippe cuius valorem ostendi

uod facillime praestatur ope reductionis supra allatae, qua ostendimus

$$\left(\frac{p+m}{q}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right).$$

: igitur fiat $p=0$ et $q=x$ atque colligitur

$$\left(\frac{m}{x}\right)=\frac{\left(\frac{0}{x}\right)}{\left(\frac{m-x}{m}\right)}=\frac{\sin.\pi x}{\pi x}:\left(\frac{m-x}{m}\right).$$

ormulam evolvendam unicum intervallum abscissae $=1$ percurrisse suf-, quem in finem statuamus $x=n+q$, ita ut q sit fractio unitate minor, ente n numero integro quovis, eritque $\sin.\pi x=\pm\sin.\pi q$, ubi signum lebit, si n sit numerus par, $-$ vero si impar. Hoc observato habebimus

$$y=\pm\frac{\sin.q\pi}{\pi(q+n)}:\left(\frac{m-n-q}{m}\right),$$

na formula iam omnes valores intermedii facile assignari poterunt sicque curva erit descripta.

COROLLARIUM

39. Hic evidens est istius curvae maximam applicatam semper respon-abscissae $x=\frac{1}{2}m$, quae simul erit curvae diameter, cuius determinatio asibus, quibus m est numerus par, nulla laborat difficultate; at si m sit rus impar, ista maxima applicata a quadratura circuli pendebit, quam in nte problemate investigemus.

PROBLEMA

0. *Investigare maximam applicatam curvae modo ante descriptae, qua abscis- respondeat applicata* $y=\left(\frac{m}{x}\right)$.

hic duos casus evolvi oportebit, prout m fuerit vel nume

Sit igitur primo $m = 2i$, erit

$$M = \binom{2i}{i},$$

cuius valorem iam dudum[1]) constat reduci ad hanc expre

$$\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdots(4i-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots i}.$$

Hinc enim patet, pro casu $i=1$ fore $M=2$. Si i

$i=3$, erit $M=20$ et ita porro.

At si m fuerit numerus impar, ponatur $m=2i+1$ e

$$M = \binom{2i+1}{i+\frac12},$$

qui valor, si ad numeros hypergeometricos reducatur, fiet

$$M = \frac{\varphi:(2i+1)}{(\varphi:(i+\frac12))^2},$$

ubi est

$$\varphi:(2i+1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2i+1).$$

At cum sit

$$\varphi:\frac12 = \frac12\sqrt{\pi}$$

hincque porro

$$\varphi:\left(1+\frac12\right) = \frac12\cdot\frac32\cdot\sqrt{\pi},$$

$$\varphi:\left(2+\frac12\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\sqrt{\pi}$$

ideoque in genere

$$\varphi:\left(i+\frac12\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i+1)}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}\cdot\sqrt{\pi},$$

---

1) Vide demonstrationem in Commentatione 575 indicis Eneströmiani: *Opera omnia*, vol. I_{16}, p. 553. C. B.

$$\frac{\varphi:(2i+1)}{\varphi:(i+\frac{1}{2})}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots\cdots 2i\times\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots 2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\varphi:(2i+1)}{\varphi:(i+\frac{1}{2})}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times 4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4i,$$

xpressio denuo per $\varphi:\left(i+\frac{1}{2}\right)$ divisa subministrat istam:

$$\frac{\varphi:(2i+1)}{(\varphi:(i+\frac{1}{2}))^2}=\frac{4}{\pi}\times\frac{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32\cdots\cdots\ 8i}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots\cdots(2i+1)}.$$

casu $m=1$ erit $i=0$ et

$$M=\frac{4}{\pi},$$

su $m=3$ erit $i=1$ et

$$M=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{32}{3\pi},$$

su $m=5$ erit $i=2$ et

$$M=\frac{8\cdot 16}{3\cdot 5}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{512}{15\pi}$$

porro.

PROBLEMA

. *Describere curvam, cuius abscissis x respondeant applicatae $\left(\frac{-m}{x}\right)$, deno- numerum quemcunque integrum positivum.*

SOLUTIO

x ipsa hac formula $y=\left(\frac{-m}{x}\right)$ sine difficultate eliciuntur applicatae pro is abscissis per numeros integros expressis; erit enim

$$\left(\frac{-m}{0}\right)=1,\quad\left(\frac{-m}{1}\right)=-m,\quad\left(\frac{-m}{2}\right)=\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$$

porro, quae ergo applicatae signis alternantibus in infinitum progredi- Pro applicatis praecedentibus notetur esse

$$\left(\frac{-m}{-m}\right)=1,\quad\left(\frac{-m}{-m-1}\right)=-m\ \text{ etc.}$$

ad formulam $\left(\frac{\ }{x}\right)$. Supra autem invenimus esse

$$\left(\frac{p-m}{q}\right)=\frac{\left(\frac{p-q}{m}\right)}{\left(\frac{p}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right).$$

Quodsi iam hic faciamus $p=0$ et $q=x$, erit

$$\left(\frac{-m}{x}\right)=\frac{\left(\frac{-x}{m}\right)}{\left(\frac{0}{m}\right)}\times\left(\frac{0}{x}\right)=\frac{\left(\frac{-x}{m}\right)}{\left(\frac{0}{m}\right)}\text{, si}$$

Quia igitur formula $\left(\frac{0}{m}\right)$ semper evanescit, numerato
numeros integros pro x, nunquam evanescere potest,
tam y semper esse infinitam, qui est casus prorsus
habentis applicatas finitas, inter quas intermediae o
gnae; cuiusmodi casus mihi quidem adhuc nondum c
tione Geometrarum haud indignum esse arbitror.

SERIES MAXIME IDONEAE PRO CIRCULI QUADRATURA PROXIME INVENIENDA[1]

Commentatio 809 indicis ENESTROEMIANI

Opera postuma I, 1862, p. 288—298

1. Antequam Analyseos infinitorum principia essent perspecta, nulla alia ia rationem peripheriae ad diametrum explorandi patebat praeter considerationem polygonorum circulo tum inscriptorum tum circumscriptorum. Ex uo fonte primum ARCHIMEDES notissimam proportionem 22 ad 7, tum vero IETIUS veritati propiorem 355 ad 113 elicuit; donec tandem LUDOLFUS a CEULEN anc proportionem ad 35 figuras in partibus decimalibus produxit, quem stuendum et molestissimum laborem certo vix ulterius prosequi licuisset. Deinde ero, cum, Analysis infinitorum ope, series idoneae rationem diametri ad eripheriam exprimentes essent exhibitae, multo minore labore ratio LUDOLIANA multo longius, primo scilicet a SHARPIO ad 72, tum vero a MACHINO d 100 ac denique a LAGNIO ad 128 figuras decimales est continuata; ex qua atione si circumferentia circuli, cuius diameter distantiam stellarum fixarum naxime remotarum superaret, computaretur, ne millesima quidem pollicis arte a veritate aberraretur.

2. Assidui autem hi calculatores, quorum industria summam meretur audem et admirationem, omnes usi sunt serie, qua arcus circuli ex tangente efinitur, ita ut posita tangente $= t$, radio existente $= 1$, arcus respondens sit

$$= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.},$$

1) In *Operum postumorum* argumento loco verbi „invenienda" legitur „investiganda". — onfer hac cum dissertatione Commentationes indicis ENESTROEMIANI 74, 125, 275, 561 voluminum praecedentium, imprimis autem Commentationem 705 huius voluminis. C. B.

quae series utique maxime convergens fieri posset, ... diminuere liceret. Verum cum hinc ratio diametri ad periph... nequeat, nisi arcus ille ad totam peripheriam assignabilem et ... rationem, vix minorem arcum in hunc finem accipere licet, q... tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; unde denotante π peripheriam circuli, cuiu... $=1$, fit

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\frac{1}{11\cdot 3^5}+\text{e}\ldots\right.$$

seu

$$\pi=\sqrt{12}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\frac{1}{11\cdot 3^5}+\ldots\right.$$

Etsi enim angulus 18°, cuius tangens est $\sqrt{\left(1-2\sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$, serie... reddat convergentem, duplex tamen irrationalitas calculum tant... reddit, ut nullum inde compendium sperari possit, quae moles... bus angulis multo magis increscit.

3. Exercitatissimus etiam calculator Lagnius, qui hunc ... gissime est prosecutus, angulum 30° aliis minoribus in hoc ... ferendum censuit; verum antequam ipsius seriei terminos evo... numero 12 radicem quadratam ultra 128 figuras decimales exa... erat coactus; quem laborem certe 12 horarum spatio expedir... quin potius crediderim auctorem ei aliquot adeo dies insudasse, ... summa, qua opus est, attentio cum relaxationem tum revision... operationum repetitionem postulat. Hoc autem labore exantla... 265 terminos ad minimum evolvere debebat; primo igitur nu... 128 figuras expressum continuo 265 vicibus per ternarium d... ad quod negotium, si cuiusque figurae inventioni et scriptioni ... secundum tribuamus, quinque horae vix sufficiebant. Deinde ... gulos respective per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. divi... quae opera ob divisores continuo maiores ad minimum tempu... ideoque 10 horarum postulabat. Denique additio cum termi... tivorum tum negativorum utraque seorsim breviori quam qu... spatio expediri haud poterat, sicque totus labor intra 37 hora... diligentia neutiquam potuerat absolvi. Nullum autem est dubiu... tempus duplo imo triplo maius impenderit.

$$\frac{\pi}{4} = \text{Ang. tang } 1 = \text{Ang. tang } \frac{1}{2} + \text{Ang. tang } \frac{1}{3},$$

per duas series

$$\pi = +2\left(1 - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 4^2} - \frac{1}{7\cdot 4^3} + \frac{1}{9\cdot 4^4} - \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} - \frac{1}{7\cdot 9^3} + \frac{1}{9\cdot 9^4} - \text{etc.}\right),$$

um adeo prior magis convergit quam praecedens ex tangente anguli 30°
a; neque hic ulla extractione radicis opus est, quae sola in calculo prae-
nti laborem 12 horarum postulaverat. Deinde priores utriusque seriei
ini saltem multo minore labore evolvuntur, cum vel paucis constent
is vel periodum in iis agnoscant, unde calculus admodum fit expeditus.
autem hic duas series in unam summam colligi oportet, tamen quia
s convergunt, multo paucioribus opus est terminis; ita, si fractionem
malem pro π ad 128 figuras iustam desideremus, prioris seriei terminos
posterioris vero 132 capi conveniet, qui totus labor praecedente ratione
matus vix 24 horas requirere videtur.

5. Deinde ex eodem principio, cum sit in genere

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{a} = \text{Ang. tang } \frac{1}{b} + \text{Ang. tang } \frac{b-a}{ab+1},$$

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{2} = \text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7}$$

que

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7},$$

1) Vide Commentationem supra laudatam 74 indicis Enestroemiani: *De variis modis circuli aturam numeris proxime exprimendi*, § 11. *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I₁₄, p. 252. C. B.

$$+\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{3\cdot 49}+\frac{1}{5\cdot 49^2}-\frac{1}{7\cdot 49^3}+\frac{1}{9\cdot 49^4}-\frac{1}{11\cdot 49^5}\right.$$

Hinc ergo si valor ipsius π ad 128 figuras iustus colligi del
132 terminos, posterioris vero tantum 75 terminos evolvisse
autem 207 terminorum evolutio certe multo minorem opera
calculus a LAGNIO subductus, extractione radicis, quae solu
insumebat, exclusa. Ex quo totus hic labor vix 18 horarum
nisi divisio per numerum 49 aliquam molestiam crearet.

6. Simili modo loco Ang. tang $\frac{1}{3}$, si non satis parvus v
introducere poterimus, servatoque altero habebimus

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{3} = \text{Ang. tang } \frac{1}{7} + \text{Ang. tang } \frac{2}{11}$$

ideoque

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ Ang. tang } \frac{2}{11} + 3 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7}$$

et

$$\pi = +\frac{16}{11}\left(1-\frac{4}{3\cdot 121}+\frac{4^2}{5\cdot 121^2}-\frac{4^3}{7\cdot 121^3}+\frac{4^4}{9\cdot 121^4}-\right.$$

$$+\frac{12}{7}\left(1-\frac{1}{3\cdot 49}+\frac{1}{5\cdot 49^2}-\frac{1}{7\cdot 49^3}+\frac{1}{9\cdot 49^4}-\right.$$

Verum etsi hic multo pauciores terminos assumsisse sufficiat, di
maiores numeros 49 et 121 omne fere lucrum adimere videtu
haec transformatio:

$$\text{Ang. tang } \frac{2}{11} = \text{Ang. tang } \frac{1}{7} + \text{Ang. tang } \frac{3}{79},$$

quae praebet

$$\frac{\pi}{4} = 5 \text{ Ang. tang } \frac{1}{7} + 2 \text{ Ang. tang } \frac{3}{79},$$

ter convergat, tamen indoles fractionis $\frac{3}{79}$ laborem non mediocriter adauget ita ut praestare videatur seriebus longe minus convergentibus uti.

7. Quando autem calculo numerico est consulendum, non solum ad convergentiam seriorum, quarum termini in summam colligi debent, respici convenit, sed potissimum ad facilitatem, qua singuli termini per operationes arithmeticas evolvantur; ita, si seriei progressio geometrica sit admixta, calculus facillime expeditur, si huius termini in ratione vel decupla vel centupla vel millecupla decrescant. Quamobrem seriei, qua angulus, cuius tangens est $= \frac{1}{7}$, ac multo magis eius, cuius tangens est $= \frac{3}{79}$, termini non sine ingenti labore evolvuntur, qui forte tantus est, ut quilibet maluerit multo plures terminos serierum pro angulis, quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ expedire, nequaquam enim maior convergentia laborem, quem singulorum terminorum postulat evolutio, compensare videtur. Sin autem eiusmodi angulis uti liceret, quorum tangentes essent $\frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}$ etc., nullum est dubium, quin praeter maiorem convergentiam etiam calculus singulorum terminorum mirum in modum sublevaretur.

8. Hunc autem usum egregie praestat alia seriei forma, qua arcum circularem ex data eius tangente exprimere licet. Deduxi autem hanc seriem ex consideratione formulae differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

ponendo eius integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = z\sqrt{(1-xx)}.$$

Hinc enim fiet differentiando

$$dx = dz(1-xx) - xzdx$$

seu

$$\frac{dz}{dx}(1-xx) - xz - 1 = 0.$$

Statuatur nunc

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \text{etc.}$$

$$-\frac{xxdz}{dx} = \quad - Axx - 3Bx^4 - 5Cx^6 - 7Dx$$

$$-\ xz\ = \quad - Axx - \ Bx^4 - \ Cx^6 - \ Dx^8$$

$$-\ 1\ = -1.$$

Singulis ergo terminis ad nihilum redigendis invenitur

$$A = 1, \quad B = \frac{2}{3}A, \quad C = \frac{4}{5}B, \quad D = \frac{6}{7}C, \quad E = \frac{8}{9}$$

ita ut sit

$$\text{Ang.}\sin x = x\sqrt{(1-xx)}\cdot\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^4 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^6 + \frac{2}{9}\right.$$

9. Sit iam $\frac{m}{n}$ tangens huius anguli, cuius sinus posita

$$x = \frac{m}{\sqrt{(mm+nn)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-xx)} = \frac{n}{\sqrt{(mm+}}$$

ita ut irrationalitas iam ex calculo excedat fiatque

$$\text{Ang.}\tan\text{g}\frac{m}{n} = \frac{mn}{mm+nn}\left(1 + \frac{2mm}{3(mm+nn)} + \frac{2\cdot 4m^4}{3\cdot 5(mm+nn)^2} + 3\cdot 5\right.$$

quae series non solum magis convergit quam vulgaris an

$$\text{Ang.}\tan\text{g}\frac{m}{n} = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m^2}{3n^2} + \frac{m^4}{5n^4} - \frac{m^6}{7n^6} + \frac{m^8}{9n^8} - \right.$$

sed etiam singuli termini fere pari facilitate evolvuntur, multiplicatio per fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ etc. non difficilius divisio per numeros 3, 5, 7, 9 etc. Tum vero, in quo ma cernitur, in eo constat, si numeri $mm+nn$ ad dividendu quam simplices potestates ipsius n, quod commodum i

10. Secundum hanc igitur novam seriem angulos supra exhibitos evolmus atque obtinebimus

$$\text{I.}\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\text{II.}\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\text{III.}\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{7} = \frac{7}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{50^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\text{IV.}\quad \text{Ang. tang}\,\frac{3}{79} = \frac{237}{6250}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{6250} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{9^2}{6250^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{9^3}{6250^3} + \text{etc.}\right),$$

ae series ad calculum arithmeticum manifesto multo magis sunt accommotae quam praecedentes, cum prima exigat continuam divisionem per 5, senda per 10, tertia per 50 et quarta per 6250, quae ideo est perquam comoda quod $\frac{9}{6250} = \frac{144}{100000}$; quam ob causam has series praecedentibus longissime eferendas esse censeo.

11. Denotet more Newtoniano in quavis serie littera P terminum quemo praecedentem totum, quo facilius pateat, quibusnam operationibus inde ci oporteat terminum sequentem, atque prima forma

$$\pi = 4\,\text{Ang. tang}\,\frac{1}{2} + 4\,\text{Ang. tang}\,\frac{1}{3}$$

ppeditat has series:

$$\pi = +\frac{8}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{5}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{5}P + \text{etc.}$$

$$+\frac{6}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}P + \text{etc.};$$

$$\pi = + \frac{24}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{10} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} P +$$

$$+ \frac{56}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{50} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{50} P + \text{etc.};$$

at ex tertia

$$\pi = 20 \,\text{Ang. tang}\, \frac{1}{7} + 8 \,\text{Ang. tang}\, \frac{3}{79}$$

prodit

$$\pi = \quad \frac{28}{10} + \frac{2}{3} \cdot \quad \frac{1}{50} \quad P + \frac{4}{5} \cdot \quad \frac{1}{50} \quad P + \frac{6}{7} \cdot \quad \frac{1}{50} \quad P + \frac{8}{9} \cdot \quad \frac{1}{50}$$

$$+ \frac{948}{3125} + \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{100000} P + \frac{4}{5} \cdot \frac{144}{100000} P + \frac{6}{7} \cdot \frac{144}{100000} P + \frac{8}{9} \cdot \frac{144}{100000}$$

In his postremis seriebus prior ita convergit, ut quilibet terminus quinquagies minor praecedente; posterior vero ita, ut quilibet term fere septingenties praecedente minor; ex quo hoc commodi assequ non sit opus in terminis primum sequentibus cyphras antecedentes quoniam nullum est periculum, ut in locis decimalibus, ubi quivis incipere debet, fallamur, hincque calculus non mediocriter sublevatu

12. His perpensis non dubito pronunciare rationem peripheriae metrum seu valorem ipsius π commodissime et promtissime obtinere duabus seriebus:

$$\pi = \qquad 2{,}8 + P \cdot \frac{2}{3} \cdot \quad \frac{2}{100} \quad + P \cdot \frac{4}{5} \cdot \quad \frac{2}{100} \quad + P \cdot \frac{6}{7} \cdot \quad \frac{2}{100} \quad +$$

$$+ 0{,}30336 + P \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{144}{100000} + P \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{144}{100000} + P \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{144}{100000} +$$

neque enim certe aliae exhiberi possunt series, quae tantopere co simulque singuli termini tam facile per calculum arithmeticum ev Hinc ergo speciminis loco valorem π tantum ad 20 notas decimales et quo calculus certior reddatur, eum ad 22 notas extendam, in singu terminis finem tantum notabo, ut nota 22$^{\text{da}}$ sit ultima, quoniam hin sponte patet. Prioris ergo seriei terminorum evolutio ita se habebi

	[illegible]3333333333	div. per 5
	74666666666666666666	
	29866666666666666666	mult. per $\frac{2}{100}$
III.	597333333333333333	div. per 7
	85333333333333333	
	51200000000000000	mult. per $\frac{2}{100}$
IV.	1024000000000000	div. per 9
	113777777777777	
	9102222222222222	mult. per $\frac{2}{100}$
V.	182044444444444	div. per 11
	16549494949494949	
	165494949494949494	mult. per $\frac{2}{100}$
VI.	33098989898989	div. per 13
	2546076146076	
	30552913752913	mult. per $\frac{2}{100}$
VII.	611058275058	div. per 15
	40737218337	
	570321056721	mult. per $\frac{2}{100}$
VIII.	11406421134	div. per 17
	670965949	
	10735455185	mult. per $\frac{2}{100}$
IX.	214709103	div. per 19
	11300479	
	203408624	mult. per $\frac{2}{100}$
X.	4068172	div. per 21
	193722	
	3874450	mult. per $\frac{2}{100}$
XI.	77489	div. per 23
	3369	
	74120	mult. per $\frac{2}{100}$
XII.	1482	div. per 25
	59	
	1423	mult. per $\frac{2}{100}$
XIII.	28	

in ratione 1:50 decrescentem, unde plures eorum evolvi non

13. Altera autem series sequenti calculo computabitur:

I. . . .	0,30336000000000000000	div. per 3
	10112000000000000000	
	20224000000000000000	mult. per [illegible]
II.	2912256000000000000	div. per 5
	582451200000000000	
	232980480000000000	mult. per [illegible]
III.	33549189120000000	div. per 7
	4792741302857I4	
	287564478I714285	mult. per [illegible]
IV.	4140928485668	div. per 9
	460103165074	
	368082532059I	mult. per [illegible]
V.	5300388461	div. per 11
	481853496	
	4818534965	mult. per [illegible]
VI.	6938690	div. per 13
	533745	
	6404945	mult. per [illegible]
VII.	9223	div. per 15
	615	
	8608	mult. per [illegible]
VIII.	12	

Huius ergo seriei pro viginti duabus notis tantum opus est
unde $22n$ notae circiter postulabunt evolutionem $8n$ terminoru
128 notis sufficiet evolvisse 47 terminos.

II.	373333333333333333
III.	597333333333333333
IV.	1024000000000000
V.	182044444444444
VI.	3309898989898989
	2,8379109202101010101
VII.	61105827505 8
VIII.	1140642134
IX.	214709103
X.	4068172
XI.	77489
XII.	1482
XIII.	28
	2,83791092083278456257 0

…mili modo addantur termini alterius seriei

I.	0,3036000000000000000000
II	29122560000000000
III.	33512918912000000
IV.	41409284856 68
V.	5300388461
VI.	6938690
VII	9223
VIII	12
	0,3036515615065147822055
prior	2,8379109208327845625 70
π =	3,14159265358979323846 25

…i numerus … ultima nota excepta iustus deprehenditur, totusque hic cal-
…lus laborem unius circiter horae consumsit; ex quo intelligere licet, si quis
…ntum laborem, quantum Ludolphus impendere velit, eum valorem peripheriae
…facile ad 200 figuras decimales esse extensurum.

semel observatis hos terminos quousque libuerit facilime
ita prioris seriei termini priores omissis in quoque cyphri
modo procedent, ubi notas periodicas deinceps continuo
inclusi:

I.	2,800 etc.
II.	37333 etc.
III.	597333 etc.
IV.	102400 etc.
V.	1820444 etc.
VI.	330(98)(98) etc.
VII.	611(058275)(058275) etc.
VIII.	11406(421134)(421134) etc.
IX.	21470(9103706750765574294986059691942044883221

Serici autem posterioris termini priores in infinitum cont

I.	0,3033600 etc.
II.	291225600 etc.
III.	335491891200 etc.
IV.	414092848566(857142)(857142) etc.
V.	53003884616557(714285)(714285) et
VI.	693869034980391(896103)(896103) e
VII.	92231207111239784(343656)(343656)
VIII.	123958742357506270157(874125) etc

16. Colligamus nunc octo priores terminos in infini
unam summam, ut ea statim qui calculum ulterius cont
queat, et pariter revolutiones periodicas in utraque summ

SUMMA 8 PRIORUM TERMINORUM SERIEI PRIORIS

I.	2,80
II.	3733333333333 3333333333
III.	59733333333 3333333333
IV.	1024000000 0000000000
V.	18204444 4444444444
VI.	330989 8989898989
	2,8379410920210101 0101010101
VII.	611058 27505827505
VIII.	11406 42113442113
	2,8379410920832565 70629370629
seu	2,8379410920832565 (706293) (706293) etc.

PRO POSTERIORE SERIE 1)

I.	0,30336
II.	2912256
III.	3354918912
IV.	41409284856857142 etc.
	0,30365156150598401856685714285714285 7142 etc.
V.	530038846165577142857142857
	0,303651561506514087413022720000000000000
VI.	6938690349803891 (89610 3)(89610 3)(89610 3)(89610 3)
VII.	922312071112 39784 (3 43656)(3 43656)(3 43656)(3
VIII.	1239587423 57506 2 70157 (8 74125)(8 74125)(8
	6947925866389 27 86901 0 03424 (6 07392)(6 07392)(6
	0,30365156150651408741302272000 00000 0 00000 0 00000 0 00000 0
	0,30365156150651478220560935 8927 86301 0 03424 (6 07392)(6 07392)(6

1) In editione principe termini octavi nota decima tertia, quae est 5, per errorem omissa . Cum hic error in sequentes calculos irrepsisset, pro summa octo priorum terminorum iste valor ortus erat

0,3036515615065147822056093589278645743484 (547452) etc.,

cui notae 33tia et sequentes falsae sunt. Correxit C. B.

at terminus sequens nonus sub nota demum vigesima quarta, ...
cipit, unde facile accuratiores approximationes indagare licet.

17. In evolutione quidem terminorum ulteriorum divisi... numeros impares moram facessere potest, ita ut ad has ope... maius tempus sit impendendum, quam supra ad minores spe... aestimavi. Verumtamen haec difficultas in serie vulgari ex ... multo est maior, propterea quod ob plures terminos evolvend... ribus divisoribus opus est conficiendum, praeterquam quod, ... operatio suscipi queat, tam taediosam radicis extractionem a... Quam ob causam dubium plane nullum superesse potest, quin ... binis novis seriebus utens longe facilius et promtius rationem ... diametrum pro quovis praecisionis gradu definire queat, qua... more consueto institueret; et quantumvis temporis spatium in... insumere cogatur, certum est more solito tempus plus quam dupl...

18. Ceterum observasse adhuc iuvabit seriem hic pro arc... traditam etiam directe ex serie consueta

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9} \ldots$$

ut s sit arcus cuius tangens $= t$, elici posse; cum enim sit

$$tts = t^3 - \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{5}t^7 - \frac{1}{7} \ldots$$

erit addendo

$$(1+tt)s = t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3\cdot 5}t^5 + \frac{2}{5\cdot 7}t^7 - \frac{2}{7\cdot 9} \ldots$$

Porro

$$tt(1+tt)s = t^3 + \frac{2}{3}t^5 - \frac{2}{3\cdot 5}t^7 + \frac{2}{5\cdot 7} \ldots$$

$(1+tt)^3 s = t(1+tt)^2 + \frac{2}{3}t^3(1+tt) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5 \qquad + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}t^9 + \text{etc.}$ [1])

$$(1+tt)^4 s = t(1+tt)^3 + \frac{2}{3}t^3(1+tt)^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5(1+tt) + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}t^9 - \text{etc.}$$

e continuo progrediendo evidens est hinc obtineri

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.}$$

$$s = \frac{t}{1+tt}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{tt}{1+tt} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{t^4}{(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{t^6}{(1+tt)^3} + \text{etc.}\right),$$

series ponendo $t = \frac{m}{n}$ cum ante exhibita congruit.

19. Quoniam seriei prioris terminum nonum exhibui, cuius revolutiones dicae 48 figuras complectuntur, seriei quoque posterioris terminum nonum ubiungam [2])

1680005543480555673161

(2932949403537638831756478815302344714109419991 77) (293 etc.

23 cyphrae sunt praefigendae, antequam ad comma, partes decimales a integrorum separans, perveniatur, ita ut prima huius termini periodus

1) In editione principe coefficiens potestatis t^9 indicatur $\frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9}$. Correxit C. B.

2) Huius fractionis notae undecima, decima secunda et decima tertia, quae sunt 480, in ne principe exhibitae sunt ut sequitur: 602. Hic et in formulis sequentibus correxit C. B.

in loco nonagesimo quarto terminetur. Si loco notarum periodic[...] fractionem ordinariam adiicere, hic terminus nonus ita finito ex[...]

$$\text{IX.}\qquad 16800055134805555673161\,\frac{713}{2431}\left[=\frac{9}{11}-\frac{3}{13}-\frac{5}{17}\right]$$

Simili autem modo prioris seriei terminus nonus expressus est[1])

$$21470\,\frac{19918}{21879}.$$

Deinde summas octo terminorum supra exhibitas ita repraesenta[...]

---

1) Editio princeps: $21470\,\frac{21002}{21879}$. Correxit C. B.

2) Editio princeps:

PRIORIS SERIEI

$$\begin{array}{lll}
\text{Summa I}\ldots\text{VIII} & 2{,}837941092083256\,5 & \frac{101}{143}\left[=\frac{1}{11}+\frac{8}{13}\right] \\
\text{terminus IX} & & 21470\,\frac{21002}{21879}\left[=\frac{5}{9}+\frac{4}{11}-\frac{2}{13}+\right. \\
\hline
\text{summa I}\ldots\text{IX} & 2{,}8379410920832780 41\,\frac{12898}{21879}. &
\end{array}$$

POSTERIORIS SERIEI

$$\begin{array}{ll}
\text{I}\ldots\text{VIII} & 0{,}30365156150651478220560985892786457434\,84\,\frac{548}{1001} \\
\text{IX} & 16800055435025555673161 \\
\hline
\text{I}\ldots\text{IX} & 0{,}30365156150651478220561038933408076904022061\,3
\end{array}$$

ubi notetur esse

$$\frac{14307}{17017}=\frac{8}{7}+\frac{1}{11}+\frac{8}{13}-\frac{5}{17},$$

unde huius fractionis evolutio est in promtu. Parique modo est prior fractio

$$\frac{12898}{21879}=\frac{5}{9}+\frac{5}{11}-\frac{7}{13}+\frac{2}{17}.$$

Correx[...]

PRIORIS SERIEI

Summa I ... VIII $\quad 2{,}837941092083256570\,\frac{90}{143}\,\left[=\frac{1}{11}+\frac{7}{13}\right]$

terminus IX $\quad 21470\,\frac{19918}{21879}\left[=\frac{1}{9}+\frac{7}{11}-\frac{4}{13}+\frac{8}{17}\right]$

summa I .... IX $\quad 2{,}837941092083278041\,\frac{11809}{21879}\left[=\frac{1}{9}+\frac{8}{11}+\frac{3}{13}+\frac{8}{17}\right]$

POSTERIORIS SERIEI

summa I ... VIII $\quad 0{,}3036515615065147822056093589278690100342460739\,\frac{261}{1001}$

terminus IX $\quad 16800055434805555673161\,\frac{713}{2431}$

summa I .... IX $\quad 0{,}30365156150651478220561103893341249058981339 00\,\frac{9428}{17017}$

ubi notetur esse

$$\frac{261}{1001}=\frac{3}{7}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}$$

$$\frac{713}{2431}=\frac{9}{11}-\frac{3}{13}-\frac{5}{17}$$

$$\frac{9428}{17017}=\frac{3}{7}+\frac{8}{11}-\frac{4}{13}-\frac{5}{17}.$$

ENODATIO INSIGNIS CUIUSDAM PARADOXI CIRCA MULTIPLICATIONE[M] ANGULORUM OBSERVATI[1]

Commentatio 810 indicis ENESTROEMIANI

Opera postuma 1, 1862, p. 299—314

1. Singularis est proprietas formularum, quibus cosinus angu[lorum mul]tiplorum per cosinum anguli simpli exprimuntur. Si enim angul[i simpli] cosinus ponatur $= x$, angulorum multiplorum cosinus ita se habe[nt]

$$\begin{aligned}
\cos. 0\varphi &= 1\\
\cos. 1\varphi &= x\\
\cos. 2\varphi &= 2xx - 1\\
\cos. 3\varphi &= 4x^3 - 3x\\
\cos. 4\varphi &= 8x^4 - 8xx + 1\\
\cos. 5\varphi &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
\cos. 6\varphi &= 32x^6 - 48x^4 + 18xx - 1\\
\cos. 7\varphi &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
\cos. 8\varphi &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32xx + 1
\end{aligned}$$

etc.,

1) Confer hac cum dissertatione praeter huius voluminis partis primae Comm[entationes] 703, 704, 747 indicis ENESTROEMIANI etiam Commentationem 247 voluminis I11 et [annotationes] ad paginas 542 et 543 adiectas. C. B.

$$\cdots \frac{\cdots}{1\cdot 2}\, x \cdots - 2 \cdots \frac{\cdots}{1\cdot 2\cdot 3}\, x \cdots +$$

seu

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1}x^n\Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\Big),$$

ubi ratio pregressionis facile perspicitur.

2. Neque vero hinc concludere licet hanc seriem eadem lege in infini
continuatam cosinum anguli $n\varphi$ exprimere, ita ut istius seriei infinitae sum
futura sit $= \cos. n\varphi$; sed queties n est numerus integer, seriem eousque
tum continuari opertet, donec ad exponentes negativos ipsius x perveni
quippe qui termini omnes sunt reiiciendi iis solis ab initio seriei term
retentis, qui constant potestatibus positivis ipsius x, et numero absoluto,
si n sit numerus par, est vel $+1$ vel -1. Nisi haec cautela observetur
errorem delabimur, quin etiam casu $n = 0$ expressio generalis veritati ad
satur; prodit enim $2^{-1}x^0 = \frac{1}{2}$, cum tamen sit $\cos. 0\varphi = 1$, quod certe ins
est paradoxon.

3. Quo clarius etiam in reliquis casibus falsitas formae generalis
spiciatur, ponamus $n = 1$, et haec forma evadet:

$$x\Big(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1\cdot 2}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{1\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} - \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \frac{1\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}x^{-10} - \text{et}$$

quae cum sit $< x$, cum veritate certe consistere nequit. Ut autem hu
seriei valor verus exploretur, ea ad hanc formam reducta:

$$x\Big(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}x^{-4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 6}x^{-6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{-8} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^{-10} - \text{etc.}\Big)$$

Cum iam sit

$$(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^{-4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{-6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{-8} -$$

nostra series hac finita forma continetur:

$$x - \frac{1}{2}x\left(1-(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{(}$$

ita ut casu $n = 1$ seriei nostrae generalis summa futura sit $=$
cum tamen sit $\cos. 1\varphi = x$. Quin etiam, cum sit $x < 1$, patet se
tum continuatae summam adeo fore imaginariam.

4. Idem etiam de quolibet alio valore ipsius n ostendi pote
magis mirandum est expressionem nostram generalem, si iusta
adhibeatur, ut omnes termini exponentes negativos ipsius x habit
tur, veritati esse consentaneam et valorem ipsius $\cos. n\varphi$ praebere;
omni extensione sumta et in infinitum continuata longe aliam
imaginariam summam sortiatur; cuiusmodi singulare phaenomeno
in aliis analyseos partibus iam sit observatum. Praeterea vero
haud minus est mirandum, notari convenit limitatione quoque il
ut potestates negativae ipsius x reiiciantur, veritatem non obtine
numerus positivus integer; si enim n esset numerus negativus,
potestates ipsius x prodeuntes negativas, error foret manifestissim
$\cos.(-n\varphi) = \cos. n\varphi$.

5. Sin autem pro n accipiatur numerus positivus quidem
nullo modo inde veritatem elicere licet. Sit enim $n = \frac{1}{2}$, et exp
generalis hanc induet formam:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{1\cdot 5}{8\cdot 16}x^{-4} - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24}x^{-6} - \frac{1\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^{-8} - \right.$$

unde etiamsi termini negativas potestates ipsius x complexuri, omnes scilice praeter primum, expungantur, tamen nentiquam inde obtinetur $\cos.\frac{1}{2}\varphi$ quippe cum sit

$$\cos.\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Multominus autem reliquis terminis admissis veritati consulitur, dum serie prodit formulae $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ minime aequalis.

6. Hinc igitur abunde liquet, quid de forma illa canonica

$$\cos.n\varphi = 2^{n-1}x^n\Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\Big)$$

apud plurimos auctores mirifice laudata sit iudicandum. Ea scilicet verita nunquam est consentanea, nisi hae restrictiones adhibeantur: primo, ut n s numerus integer positivus, ubi quidem etiam cyphra est excludenda; deind ut termini, in quibus exponens potestatis x fit negativus, penitus extinguan tur. Qui huic formulae plus tribuunt, eamque adeo ad casus, quibus n e numerus negativus vel fractus, extendere volunt, maxime decipiuntur et gravissimos errores illabuntur. Quae cum sint adeo manifesta, mirandu videtur, quod istae tam necessariae cautelae, quantum equidem memini, nemine sint animadversae.

7. Haec consideratio occasionem mihi praebet duplicem investigatione suscipiendi. Primo scilicet in veram summam nostrae expressionis general siquidem in infinitum continuetur, sum inquisiturus, ut pateat, quantum quovis casu a valore $\cos.n\varphi$ discrepet. Deinde similem expressionem gen ralem investigabo, quae revera valorem $\cos.n\varphi$ exhibeat et nulla restrictio adhibita veros cosinus angulorum multiplorum ipsius φ praebeat, ita ut si gulis casibus, quibus n est numerus integer, formulae initio allatae prodea simulque veritas, quando n est numerus fractus vel negativus, obtineatur.

8. Quo utrique instituto facilius satisfaciam, considero hanc for

$$s = A(x + \sqrt{(xx-1)})^n$$

valorem ipsius s per seriem evoluturus, quae secundum potestate procedat. Cum igitur sit

$$\sqrt{(xx-1)} = x - \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4x^3} - \text{etc.},$$

ob

$$s = A\left(2x - \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4x^3} - \text{etc.}\right)^n$$

observo terminum primum futurum esse $= 2^n Ax^n$, in sequentibus ponentes potestatis x continuo binario decrescere, ita ut series habitura sit formam

$$s = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-4} + \delta x^{n-6} + \varepsilon x^{n-8} + \text{etc.},$$

ubi quidem est $\alpha = 2^n A$.

9. Ad hanc autem seriem commodissime eruendam observo ae assumtam per differentiationem in aliam converti oportere, in potestas indefinita quam omnis irrationalitas absit simulque quant que plus una dimensione non sit habitura; huiusmodi enim aequati per seriem certa lege procedentem resolvitur. Hunc in finem prim mis sumendis obtineo

$$ls = lA + nl(x + \sqrt{(xx-1)});$$

tum vero differentiando:

$$\frac{ds}{s} = \left(ndx + \frac{nxdx}{\sqrt{(xx-1)}}\right) : (x + \sqrt{(xx-1)}) = \frac{ndx}{\sqrt{(xx-1)}}.$$

Hic sumtis quadratis erit

$$\frac{ds^2}{ss} = \frac{nndx^2}{xx-1}$$

seu

$$(xx-1)ds^2 = nnssdx^2,$$

ae aequatio denuo differentiata sumto elemento dx constante et per $2d$
isa dat

$$(xx-1)dds+xdxds=nnsdx^2,$$

ae iam formam habet desideratam, ita ut quantitas s nusquam plus un
iensione habeat et quantitas x ab omni irrationalitate sit immunis.

10. Quia hic quantitas x in aliis terminis duas, in uno vero nullam tene
iensionem, facta huiusmodi distinctione, ut sit

$$xxdds+xdxds-nnsdx^2-dds=0,$$

iamus

$$s=\alpha x^m+\beta x^{m-2}+\gamma x^{m-4}+\cdots+\mu x^{m-i}+\nu x^{m-i-2}+\text{etc.}$$

facta substitutione potestas x^{m-i-2} talem accipiet coefficientem:

$$\nu((m-i-2)(m-i-3)+m-i-2-nn)-\mu(m-i)(m-i-1),$$

cum evanescere debeat, quantitas ν ex μ ita definitur, ut sit

$$\nu=\frac{(m-i)(m-i-1)}{(m-i-2)^2-nn}\mu.$$

tuatur iam pro initio $i=-2$, ut fiat $\nu=\alpha$ et $\mu=0$, proditque

$$\alpha=\frac{(m+2)(m+1)}{mm-nn}0,$$

e littera ut maneat indefinita, esse oportet $mm=nn$ ideoque vel $m=$
$m=-n$.

11. Nostro autem casu est, ut supra vidimus, $m=n$ atque $\alpha=2^nA$
ro posito

$$s=\alpha x^n+\beta x^{n-2}+\gamma x^{n-4}+\cdots+\mu x^{n-i}+\nu x^{n-i-2}+\text{etc.}$$

$$\nu=\frac{(n-i)(n-i-1)}{(n-i-2)^2-nn}\mu=-\frac{(n-i)(n-i-1)}{(i+2)(2n-i-2)}\mu,$$

$$\gamma = \frac{-(n-2)(n-3)}{8(n-2)}\beta = \frac{+n(n-3)}{4\cdot 8}\alpha,$$

$$\delta = \frac{-(n-4)(n-5)}{12(n-3)}\gamma = \frac{-n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}\alpha,$$

$$\varepsilon = \frac{-(n-6)(n-7)}{16(n-4)}\delta = \frac{+n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\alpha$$

etc.

12. Posito ergo

$$s = A(x + \sqrt{(xx-1)})^n$$

ob $\alpha = 2^n A$ habebimus hanc seriem, qua quantitas s exprimitu

$$s = 2^n A x^n \Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{et}$$

Quare si pro A capiatur $\frac{1}{2}$, orietur ipsa illa forma, quam ini assignavimus existente $x = \cos.\varphi$, atque nunc quidem patet illi in infinitum continuatae verum valorem esse

$$\frac{1}{2}(x + \sqrt{(xx-1)})^n;$$

sicque ratio aberrationis a valore $\cos.n\varphi$ est manifesta, atqu evidens est, cur sumto $n = 0$ prodeat summa nostrae serie vero casibus summa fiat imaginaria, si quidem sit $x < 1$. $x = 1$, quicunque numerus pro n accipiatur, summa semper es propterea

$$1 = 2^n\Big(1 - \frac{n}{4} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n(n-5)(n-6)(n}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}$$

quod certe est theorema non inelegans.

$$\sqrt{(xx-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi$$

et ex notis sinuum proprietatibus

$$(\cos. \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. \varphi)^n = \cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi .$$

Quare posito $\cos. \varphi = x$ erit

$$\cos. n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi$$

$$= 2^n x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \text{etc.}\right),$$

unde patet summam huius seriei in infinitum continuatae esse imaginariam nisi sit $x = 1$ seu $\varphi = 0$. Realis quidem semper erit, dum sit $x > 1$; sed hi casibus non amplius ad sinus et cosinus referri potest. Veluti si $xx = 2$, o

$$s = A(1 + \sqrt{2})^n$$

erit

$$(\sqrt{2}+1)^n = 2^{\frac{3n}{2}}\left(1 - \frac{n}{8} + \frac{n(n-3)}{8 \cdot 16} - \frac{n(n-4)(n-5)}{8 \cdot 16 \cdot 24} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{8 \cdot 16 \cdot 24 \cdot 32} - \text{etc.}\right)$$

At si ponamus

$$x + \sqrt{(xx-1)} = y,$$

fit

$$x = \frac{yy+1}{2y},$$

unde obtinetur sequens summatio non contemnenda:

$$\left(\frac{yy}{yy+1}\right)^n = 1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{yy}{(yy+1)^2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^4}{(yy+1)^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^6}{(yy+1)^6} + \text{etc.}$$

quae cum etiam vera sit sumto n negativo, erit

$$\left(\frac{yy+1}{yy}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{yy}{(yy+1)^2} + \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^4}{(yy+1)^4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^6}{(yy+1)^6} + \text{etc.}$$

ubi pro n omnes numeros assumere licet.

14. Hinc etiam alteri requisito satisfacere poterimus, quo
pressio infinita desideratur quantitatem $\cos. n\varphi$ sine ulla restricti
Sumatur enim exponens n negative, et cum sit

$$\cos. (-n\varphi) = \cos. n\varphi$$

et

$$\sin. (-n\varphi) = -\sin. n\varphi,$$

erit ex superiori forma

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi$$

$$= \frac{1}{2^n x^n}\left(1 + \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \text{e}\right.$$

addendis his formulis pars imaginaria tollitur et summae semi

$$\cos. n\varphi = + 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x\right.$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1} x^n}\left(1 + \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x\right.$$

Hae scilicet binae series coniunctae verum valorem ipsius cos
$\cos. \varphi = x$ exprimunt idque sine ulla restrictione, ita ut pro n o
tam negativos quam positivos, tam integros quam fractos as
Ubi quidem per se est perspicuum, sive ipsi n tribuatur valor
cunque sive idem positivus, easdem binas series ordine mutato

$$\cos. 0\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Reliquos igitur casus simpliciores evolvamus:

I. Sit $n = 1$ oritque

$$\cos. \varphi = x\left(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1\cdot 2}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{1\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} - \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{4x}\left(1 + \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 8}x^{-4} + \frac{1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \frac{1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} + \text{etc.}\right).$$

ubi potestates negativae ipsius x sponte se destruunt, uti ex sequente re- sentatione fit perspicuum:

$$\cos. \varphi = x - \frac{1}{4}x^{-1} - \frac{1\cdot 2}{4\cdot 8}x^{-3} - \frac{1\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-5} - \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-7} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}x^{-3} + \frac{1\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 8}x^{-5} + \frac{1\cdot 1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 12}x^{-7} + \text{etc.},$$

ita ut sit

$$\cos. \varphi = x.$$

II. Sit $n = 2$ oritque

$$\cos. 2\varphi = 2xx\left(1 - \frac{2}{4}x^{-2} - \frac{2\cdot 1}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{2\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} - \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{8xx}\left(1 + \frac{2}{4}x^{-2} + \frac{2\cdot 5}{4\cdot 8}x^{-4} + \frac{2\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \frac{2\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} + \text{etc.}\right)$$

quae binae series ita ordinate exhibeantur:

$$\cos. 2\varphi = 2xx - 1 - 2\cdot\frac{2\cdot 1}{4\cdot 8}x^{-2} - 2\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-4} - 2\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-6} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{8}x^{-2} + \frac{1\cdot 2}{8\cdot 4}x^{-4} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{8\cdot 4\cdot 8}x^{-6} + \text{etc.}$$

$$+\frac{1}{16x^3}\Big(1+\frac{3}{4}x^{-2}+\frac{3\cdot 6}{4\cdot 8}x^{-4}+\frac{3\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}+\frac{3\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x$$

qui termini hoc modo in ordinem redigantur:

$$\cos.3\varphi=4x^3-3x-0x^{-1}-4\cdot\frac{3\cdot 1\cdot 2}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-3}-4\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-}$$

$$+\quad\frac{1}{16}\quad x^{-3}+\qquad\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}\quad x^{-}$$

hincque

$$\cos.3\varphi=4x^3-3x.$$

16. His autem exemplis casu evenire videtur, ut potestates
mutuo tollant, neque id pro terminis ulterioribus patet. Quamobr
dubium relinquatur, firma demonstratione evincendum est singul
negativas ipsius x in utraque serie paribus coefficientibus signisq
esse affectas, ita ut certum sit omnes se mutuo destruere. Hu
utriusque seriei terminum generalem contemplemur ac prioris q
ita repraesentatae

$$2^{n-1}x^n\Big(1-\frac{n}{4}x^{-2}-\frac{n(3-n)}{4\cdot 8}x^{-4}-\frac{n(4-n)(5-n)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$

$$-\frac{n(5-n)(6-n)(7-n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8}-$$

terminus generalis colligitur fore

$$-2^{n-1}x^{n-2\alpha}.\frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n)\cdots(2\alpha-1-}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\alpha}$$

ita, ut potestatis $x^{n-2\alpha}$ coefficiens sit

$$-2^{n-1}\cdot\frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n)\cdots(2\alpha-1-n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\alpha}.$$

Quando ergo haec potestas est negativa seu $2\alpha > n$, patet hunc termi
evanescere his casibus:

$$2\alpha = n+1,\quad 2\alpha = n+2,\quad 2\alpha = n+3 \quad \text{usque ad} \quad 2\alpha = 2n-2,$$

si quidem α fuerit numerus integer. Unde in priori serie omnium potest
negativarum coefficientes sponte evanescunt, nisi sit $2\alpha > 2n-2$ seu $\alpha > n$
quocirca docendum restat, si fuerit $\alpha > n-1$, istas potestates negativas
alteram seriem destrui, ita ut solae potestates positivae ipsius x relinqua

17. Alterius autem seriei, quae ita se habet:

$$\frac{1}{2^{n+1}x^n}\Big(1+\frac{n}{4}x^{-2}+\frac{n(3+n)}{4\cdot 8}x^{-4}+\frac{n(4+n)(5+n)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$
$$+\frac{n(5+n)(6+n)(7+n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8}+\text{etc.}\Big),$$

terminus generalis colligitur

$$\frac{x^{-n-2\beta}}{2^{n+1}}\cdot\frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n)\cdots(2\beta-1+n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\beta},$$

unde potestatis negativae $x^{-n-2\beta}$ coefficiens est

$$2^{-n-1}\cdot\frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n)\cdots(2\beta-1+n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\beta}.$$

Statuatur iam haec potestas praecedenti $x^{n-2\alpha}$ aequalis, seu $n-2\alpha=-n-$
fitque $\alpha = n+\beta$; sicque ipsae illae potestates negativae maiores prode
quarum coefficientes in priori serie non sponte evanescunt. Ostendi
oportet harum potestatum coefficientes ex utraque serie ortos inter se
aequales et se mutuo destruere, ubi quidem iam sponte patet alterum
positivum alterum negativum, ex quo utriusque aequalitas demonstrari d

18. Cum sit $\alpha = n + \beta$, erit $n = \alpha - \beta$, ideoque denominatoribus ...

$$2^{\alpha-\beta-1} \cdot \frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\alpha}$$

$$= 2^{\beta-\alpha-1} \cdot \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\beta},$$

seu utrinque per $2^{\alpha+\beta+1}$ multiplicando

$$2^{2\alpha} \cdot \frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\alpha} = 2^{2\beta} \cdot \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots\cdots 4\beta}.$$

Cum iam in priori forma factorum denominatoris numerus sit $= \alpha$ ... per quaternarium sint divisibiles, hos factores ita repraesentare lic...

$$4^{\alpha}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots \alpha = 2^{2\alpha}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots \alpha;$$

simili modo denominator alterius formae ita exprimi poterit:

$$4^{\beta}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots \beta = 2^{2\beta}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots \beta,$$

unde haec aequalitas ostendenda superest

$$\frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots \alpha} = \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots \beta}$$

quae per crucem multiplicata manifesto utrinque praebet idem pro...

$$n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(\alpha+\beta-1).$$

19. Paradoxon ergo initio propositum satis distincte explicatu... simulque ratio patet, cur haec aequatio:

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1}x^n\left(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \cdots\right.$$

tum demum sit veritati consentanea, quando n denotat numerum ... positivum simulque omnes potestates ipsius x exponentes negativos ... expungantur, et cur his restrictionibus non observatis haec expres... rorem praecipitet.

$$\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{1\cdot 5}{8\cdot 16}x^{-4} - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24}x^{-6} - \frac{1\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2x}}\left(1 + \frac{1}{8}x^{-2} + \frac{1\cdot 7}{8\cdot 16}x^{-4} + \frac{1\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 16\cdot 24}x^{-6} + \frac{1\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

n ordinem secundum potestates redacta dat

$$\cdot \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8xx} + \frac{1}{2\cdot 8x^3} - \frac{1\cdot 5}{8\cdot 16x^4} + \frac{1\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 16x^5} - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24x^6}\right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 8\cdot 16\cdot 24x^7} - \text{etc.}\right),$$

quilibet coefficiens per praecedentem dividatur, haec resultat series:

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{5}{8}, \quad -\frac{7}{10}, \quad -\frac{9}{12}, \quad -\frac{11}{14} \quad \text{etc.},$$

it

$$s. \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^{-2} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{-3} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{-4} + \text{etc.}\right)$$

o manifesto habebitur

$$\cos.\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

nstat.

. Evolvamus etiam casum $n = \frac{1}{3}$, ac reperimus

$$= \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4}}\left(1 - \frac{1}{12}x^{-2} - \frac{1\cdot 8}{12\cdot 24}x^{-4} - \frac{1\cdot 11\cdot 14}{12\cdot 24\cdot 36}x^{-6} - \frac{1\cdot 14\cdot 17\cdot 20}{12\cdot 24\cdot 36\cdot 48}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt[3]{2x}}\left(1 + \frac{1}{12}x^{-2} + \frac{1\cdot 10}{12\cdot 24}x^{-4} + \frac{1\cdot 13\cdot 16}{12\cdot 24\cdot 36}x^{-6} + \frac{1\cdot 16\cdot 19\cdot 22}{12\cdot 24\cdot 36\cdot 48}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

quae binae series ita coniungantur:

$$\cos.\frac{1}{3}\varphi=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{12\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$+\frac{1}{12\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{7}{3}}-\frac{1\cdot 8}{12\cdot 24\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{11}{3}}+\frac{1\cdot 10}{12\cdot 24\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{13}{3}}-$$

Iam ad irrationalitatem tollendam statuatur $x^{\frac{1}{3}}=y\sqrt[3]{4}$ seu $x=4y^3$, a

$$\cos.\frac{1}{3}\varphi=y+\frac{1}{4y}-\frac{1}{12\cdot 4^2y^5}+\frac{1}{12\cdot 4^3y^7}-\frac{1\cdot 8}{12\cdot 24\cdot 4^4y^{11}}$$

$$+\frac{1\cdot 10}{12\cdot 24\cdot 4^5y^{13}}-\frac{1\cdot 11\cdot 14}{12\cdot 24\cdot 36\cdot 4^6y^{17}}+$$

Sit porro $y=\frac{z}{2}$, erit

$$\cos.\frac{1}{3}\varphi=\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6z^5}+\frac{1}{6z^7}-\frac{1\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 6z^{11}}$$

$$+\frac{1\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 6z^{13}}-\frac{1\cdot 11\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 6\cdot 9z^{17}}+\frac{1\cdot 13\cdot 16}{2\cdot 3\cdot 6\cdot 9z^{19}}$$

seu

$$2\cos.\frac{1}{3}\varphi=z+\frac{1}{z}-\frac{1}{3z^5}+\frac{1}{3z^7}-\frac{1\cdot 8}{3\cdot 6z^{11}}$$

$$+\frac{1\cdot 10}{3\cdot 6z^{13}}-\frac{1\cdot 11\cdot 14}{3\cdot 6\cdot 9z^{17}}+\frac{1\cdot 13\cdot 16}{3\cdot 6\cdot 9z^{19}}-$$

22. In genere autem casus $x=\frac{1}{2}$, unde fit $\varphi=60^0$ seu $\varphi=$ tante π semicircumferentiam circuli, cuius radius $=1$, omni attenti videtur. Nam, ob $2x=1$, fit

$$\cos.\frac{n}{3}\pi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{1}+\frac{n(n+3)}{1\cdot 2}+\frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$

ubi notari convenit utriusque seriei summam seorsim sumtam oss riam, et quia utraque est divergens, minime licet eas pro lubitu Veluti si termini ordinate coniungerentur, prodiret

$$\cos.\frac{n}{3}\pi = 1 + \frac{nn}{1\cdot 2} + \frac{9nn}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{nn(nn+107)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

o sequeretur fore $\cos.\frac{n}{3}\pi > 1$, quod tamen est absurdum. Interim tamen rum illarum prioris summa est

$$\frac{1}{2}\left(\cos.\frac{n}{3}\pi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{n}{3}\pi\right),$$

erioris vero

$$\frac{1}{2}\left(\cos.\frac{n}{3}\pi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{n}{3}\pi\right),$$

ne nullum est dubium, quin ambae coniunctim praebeant $\cos.\frac{n}{3}\pi$, etiamsi pateat, quemadmodum hic valor ex coniunctione facta elici possit. Hinc denuo insigne paradoxon resultat, cuius explicatio haud parum ardua tur; sine dubio autem ex seriorum divergentia est petenda et series signis uantibus ita scribenda terminorum numero neque pari neque impari tato

$$\cos.\frac{n}{3}\pi = 2 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1} - \frac{n(3-n)}{1\cdot 2}$$

$$+ \frac{n(3+n)}{1\cdot 2} - \frac{n(4-n)(5-n)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(4+n)(5+n)}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{etc.},$$

ut sit

$$\frac{2-2\cos.\frac{n}{3}\pi}{n} = \frac{3-n}{1\cdot 2} - \frac{3+n}{1\cdot 2} + \frac{(4-n)(5-n)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(4+n)(5+n)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+ \frac{(5-n)(6-n)(7-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}$$

ommoda autem effugere non licet, nisi quantitas x indefinita relinquatur seriei termini secundum eius potestates disponantur.

23. Verum etiam hoc modo haud leves difficultates relinquuntur; si enim orum n sumamus infinite parvum, ut sit $\cos.n\varphi = 1 - \frac{1}{2}nn\varphi\varphi$, ob

$$2^n x^n = 1 + nl2x + \frac{1}{2}nn(l2x)^2$$

$$\frac{1}{2^n x^n} = 1 - nl2x + \frac{1}{2}nn(l2x)^2$$

habebimus, in singulis terminis potestates ipsius n quadrato altiores negligen

$$2 - nn\varphi\varphi = +\left(1 + nl2x + \frac{1}{2}nn(l2x)^2\right) \times$$

$$\left(1 - \frac{n}{4xx} - \frac{3n - nn}{4 \cdot 8x^4} - \frac{20n - 9nn}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} - \frac{210n - 107nn}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} - \text{etc}\right.$$

$$+\left(1 - nl2x + \frac{1}{2}nn(l2x)^2\right) \times$$

$$\left(1 + \frac{n}{4xx} + \frac{3n + nn}{4 \cdot 8x^4} + \frac{20n + 9nn}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} + \frac{210n + 107nn}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} + \text{etc}\right.$$

Atque facta evolutione tam partes finitae quam infinite parvae ipso nume n affectae se mutuo destruunt, reliquae vero per nn divisae praebent

$$\varphi\varphi = 2l2x\left(\frac{1}{4xx} + \frac{3}{4 \cdot 8x^4} + \frac{20}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} + \frac{210}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} + \text{etc.}\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{4 \cdot 8x^4} + \frac{9}{4 \cdot 8 \cdot 12x^6} + \frac{107}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16x^8} + \text{etc.}\right) - (l2x)^2$$

existente $x = \cos.\varphi$. Ad legem huius progressionis clarius percipiendam po mus $2x = y$, ut sit

$$y = 2\cos.\varphi$$

et

$$\frac{3}{2} = A = \frac{3}{2}, \quad A \cdot \frac{1}{3} \qquad = \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 3} = B = \frac{10}{3}, \quad B\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \qquad = \beta = \frac{3}{2} = A,$$

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = C = \frac{35}{4}, \quad C\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \qquad = \gamma = \frac{107}{24} = B + \frac{1}{2}AA,$$

$$\frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = D = \frac{126}{5}, \quad D\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) \qquad = \delta = \frac{55}{4} = C + AB,$$

$$\frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = E = 77, \quad E\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) = \varepsilon = \frac{15797}{360} = D + AC + \frac{1}{2}B$$

etc. etc.

ue

$$qq = 2ly\left(\frac{1}{yy} + \frac{A}{y^4} + \frac{B}{y^6} + \frac{C}{y^8} + \frac{D}{y^{10}} + \text{etc.}\right)$$

$$- 2\left(\frac{\alpha}{y^4} + \frac{\beta}{y^6} + \frac{\gamma}{y^8} + \frac{\delta}{y^{10}} + \text{etc.}\right) - (ly)^2,$$

i brevitatis gratia statuamus

$$P = \frac{1}{yy} + \frac{A}{y^4} + \frac{B}{y^6} + \frac{C}{y^8} + \text{etc.},$$

$$qq = 2Ply - PP - (ly)^2$$

$$qq = -(ly - P)^2,$$

est absurdum.

21. Omnino autem notatu digna est relatio, quam hic inter numerorum , C, D etc. et numerorum α, β, γ, δ etc. ordines observavi et quae nodissime ita referri potest, ut sit

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = \frac{1}{2}(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})^2,$$

demonstratio haud parum ardua videtur. Operae igitur pretium est em horum numerorum accuratius contemplari:

$$\frac{3}{2} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot 1, \qquad \alpha = A\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1^2,$$

$$\frac{3\cdot 5}{\cdot 3} = \frac{4\cdot 5}{3\cdot 3}A, \qquad \beta = B\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - 1\cdot A,$$

$$\frac{\cdot 6\cdot 7}{\cdot 3\cdot 4} = \frac{6\cdot 7}{4\cdot 4}B, \qquad \gamma = C\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - 1\cdot B + \frac{1}{2}AA,$$

$$\frac{\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{8\cdot 9}{5\cdot 5}C, \qquad \delta = D\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) - 1\cdot C + AB,$$

$$\frac{\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{10\cdot 11}{6\cdot 6}D, \qquad \varepsilon = E\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) - 1\cdot D + AC + \frac{1}{2}BB$$

etc. etc.

25. Consideremus hanc proprietatem in solis numeris integris ...
mus has binas progressiones:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1, & & \\
\mathfrak{A} &= 3, & \mathfrak{a} &= \mathfrak{A}\cdot\tfrac{1}{3}, \\
\mathfrak{B} &= 4\cdot 5, & \mathfrak{b} &= \mathfrak{B}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right), \\
\mathfrak{C} &= 5\cdot 6\cdot 7, & \mathfrak{c} &= \mathfrak{C}\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}\right), \\
\mathfrak{D} &= 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9, & \mathfrak{d} &= \mathfrak{D}\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}\right), \\
\mathfrak{E} &= 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11, & \mathfrak{e} &= \mathfrak{E}\left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}\right), \\
\mathfrak{F} &= 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13 & \mathfrak{f} &= \mathfrak{F}\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13} \ldots\right. \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

eritque ut sequitur:

$$\mathfrak{a} = 2\cdot\frac{1\cdot 1}{2}, \quad \mathfrak{b} = 3\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{c} = 4\mathfrak{B} + 6\,\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{2}, \quad \mathfrak{d} = 5\mathfrak{C} + 10\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{e} = 6\mathfrak{D} + 15\mathfrak{A}\mathfrak{C} + 20\,\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{2}, \quad \mathfrak{f} = 7\mathfrak{E} + 21\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 35\mathfrak{B}\mathfrak{C} \;[+\text{ etc.}]$$

seu

$$2\mathfrak{f} = 7\cdot 1\mathfrak{E} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mathfrak{C}\mathfrak{B} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\mathfrak{D}\ldots$$

$$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\mathfrak{E}\cdot 1,$$

unde lex progressionis est manifesta. Vel erit

$$\frac{\mathfrak{a}}{2} + \frac{\mathfrak{b}z}{2\cdot 3} + \frac{\mathfrak{c}zz}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\mathfrak{d}z^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathfrak{A}z}{2} + \frac{\mathfrak{B}zz}{2\cdot 3} + \frac{\mathfrak{C}z^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\mathfrak{D}z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ldots\right.$$

26. Pro insigni autem hac proprietate sequentem inveni demonstr...
qua simul indoles huiusmodi formularum penitius perspiciatur. Pona...

vatur haec series secundum potestates indicis n, fingaturque

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi = y^n(1 + nP + nnQ + n^3R + n^4S + \text{etc.});$$

forma quo facilius intelligi possit, novo signandi modo utamur, scilicet positis quotcunque numeris α, β, γ, δ etc.

haec scriptio:	denotat
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(1)}$	summam singulorum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$,
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(2)}$	summam productorum ex binis,
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(3)}$	summam productorum ex ternis,
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(4)}$	summam productorum ex quaternis
etc.	etc.,

observo, si index suffixus aequalis sit multitudini numerorum, hac scriptio omnium productum exprimi, tum vero semper esse

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(0)} = 1.$$

autem scribendi modo adhibito erit

$$P = \frac{1}{1}y^2 + \frac{(3)^{(1)}}{2}y^4 + \frac{(4,5)^{(2)}}{2\cdot 3}y^6 + \frac{(5,6,7)^{(3)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(4)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$Q = \frac{(3)^{(0)}}{2}y^4 + \frac{(4,5)^{(1)}}{2\cdot 3}y^6 + \frac{(5,6,7)^{(2)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(3)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$R = \frac{(4,5)^{(0)}}{2\cdot 3}y^6 + \frac{(5,6,7)^{(1)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(2)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$S = \frac{(5,6,7)^{(0)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(1)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$T = \frac{(6,7,8,9)^{(0)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.}$$

etc.

Cum autem sit, uti constat,

$$\cos.\,\lambda n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\lambda n\varphi = (\cos.\,n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,n\varphi)$$

erit quoque

$$\cos.\,\lambda n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,\lambda n\varphi = y^{\lambda n}(1 + nP + n^2Q + n^3R +$$

ideoque

$$1 + \lambda nP + \lambda^2n^2Q + \lambda^3n^3R + \text{etc.} = (1 + nP + n^2Q + n^3R +$$

quae aequalitas subsistere nequit, nisi sit

$$Q = \frac{1}{2}P^2, \quad R = \frac{1}{2\cdot 3}P^3, \quad S = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}P^4, \quad T = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}P^5$$

Atque hinc porro colligere licet, cum sit

$$\cos.\,n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,n\varphi = e^{-n\varphi\sqrt{-1}},$$

nunc autem invenerimus

$$\cos.\,n\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\,n\varphi = y^ne^{nP} = e^{n(P+ly)},$$

fore

$$-\varphi\sqrt{-1} = P + ly$$

ideoque

$$\varphi\varphi = -(P + ly)^2,$$

quod cum videatur absurdum, ita resolvi oportet, quod P semper tas imaginaria; sicque explicatur paradoxon supra § 23 allatum.

28. Verum ut ad propositum revertar, cum sit $Q = \frac{1}{2}PP$, s gratia valores § 24 explicatos introducamus, erit

$$P = yy + Ay^4 + By^6 + Cy^8 + Dy^{10} + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha y^4 + \beta y^6 + \gamma y^8 + \delta y^{10} + \text{etc.},$$

unde valoribus Q et $\frac{1}{2}PP$ aequatis nanciscimur supra observatas relatior scilicet

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = A, \quad \gamma = B + \frac{1}{2}AA, \quad \delta = C + AB, \quad \varepsilon = D + AC + \frac{1}{2}BI$$

et ita porro. Hac igitur demonstratione confecta aliarum similium formular complicatarum resolutionem coronidis loco subiungam.

PROBLEMA

29. *Hanc formulam:*

$$a(1 + \sqrt{(1-x)})^n$$

in seriem infinitam resolvere secundum potestates ipsius x progredientem.

SOLUTIO

Statuatur

$$z = a(1 + \sqrt{(1-x)})^n$$

et posita serie, quae quaeritur,

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

evidens est fore $A = 2^n a$, unde sequentes coefficientes simili modo ut su definire licebit. Sumtis logarithmis habemus

$$lz = la + nl(1 + \sqrt{(1-x)})$$

et differentiando

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ndx}{2\sqrt{(1-x)}} : (1 + \sqrt{(1-x)}).$$

Multiplicetur numerator ac denominator per $(1 - \sqrt{(1-x)})$ prodibitque

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ndx(1-\sqrt{(1-x)})}{2x\sqrt{(1-x)}} = \frac{ndx}{2x} - \frac{ndx}{2x\sqrt{(1-x)}}$$

Ponatur

$$z = x^{\frac{n}{2}} v,$$

ut sit

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v} + \frac{n\,dx}{2x},$$

fietque

$$\frac{dv^2}{vv} = \frac{nn\,dx^2}{4xx(1-x)}$$

seu

$$4xx(1-x)\,dv^2 = nnvv\,dx^2,$$

quae aequatio differentiata et per $2dv$ divisa praebet

$$4xx(1-x)\,ddv + 2x(2-3x)\,dx\,dv - nnv\,dx^2 = 0$$

Cum nunc sit

$$\frac{dv}{v} = \frac{dz}{z} - \frac{n\,dx}{2x},$$

erit differentiando

$$\frac{ddv}{v} - \frac{dv^2}{vv} = \frac{ddz}{z} - \frac{dz^2}{zz} + \frac{n\,dx^2}{2xx};$$

at

$$\frac{dv^2}{vv} = \frac{dz^2}{zz} - \frac{n\,dx\,dz}{xz} + \frac{nn\,dx^2}{4xx},$$

ergo

$$\frac{ddv}{v} = \frac{ddz}{z} - \frac{n\,dx\,dz}{xz} + \frac{n(n+2)\,dx^2}{4xx},$$

unde facta substitutione:

$$4xx(1-x)\frac{ddz}{z} - 4nx(1-x)\frac{dx\,dz}{z} + n(n+2)(1-x)\,d$$

$$+ 2x(2-3x)\frac{dx\,dz}{z} - n(2-3x)\,dx^2$$

$$- nn\,dx^2$$

seu

$$4x(1-x)\,ddz - 4(n-1)\,dx\,dz + 2(2n-3)\,x\,dx\,dz - n(n -$$

Cum hic variabilis x partim unicam, partim duas dimensiones obt
distinguendo hos terminos

$$+4xddz - 4(n-1)dxdz$$

$$-4xxddz + 2(2n-3)xdxdz - n(n-1)zdx^2 = 0$$

statuamus

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \cdots + Mx^i + Nx^{i+1} + \text{etc.}$$

et potestatis x^i coefficiens erit

$$+N(4i(i+1) - 4(n-1)(i+1)) + M(-4i(i-1) + 2(2n-3)i - n(n$$

qui cum evanescere debeat, habebitur

$$N = \frac{(2i-n)(2i-n+1)}{4(i+1)(i-n+1)}M.$$

Nunc autem novimus esse

$$A = 2^n a,$$

quare sequentes coefficientes erunt

$$B = -\frac{n(n-1)}{4(n-1)}A = -\frac{n}{4}A,$$

$$C = -\frac{(n-2)(n-3)}{8(n-2)}B = +\frac{n(n-3)}{4\cdot 8}A,$$

$$D = -\frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)}C = -\frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}A$$

etc. etc.

Sumatur $a = 2^{-n}$, ut fiat $A = 1$, eritque

$$\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n = 1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}xx - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3$$

$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 - \text{etc.},$$

quae est series quaesita.

COROLLARIUM 1

30. Sumto x negativo sequentis seriei

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}xx + \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4$$

summa erit

$$= \left(\frac{1+\sqrt{(1+x)}}{2}\right)^n,$$

ex cuius combinatione cum praecedente alternis tantum terminis summa assignari poterit.

COROLLARIUM 2

31. Si exponens n negative capiatur, binae sequentes series ad revocabuntur:

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8}xx + \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4$$

huius seriei summa est

$$= \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-n} = 2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{x}\right)^n.$$

Tum

$$1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8}xx - \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4$$

cuius summa est

$$= 2^n\left(\frac{\sqrt{(1+x)}-1}{x}\right)^n.$$

PROBLEMA

32. *Hanc formulam*

$$\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$$

in seriem infinitam resolvere, cuius termini secundum potestates ipsius x direntur.

SOLUTIO

Posito

$$z=\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$$

erit quadratis sumendis

$$zz=\left(\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{2}\right)^n$$

hincque

$$z=\left(\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

quae forma in priori continetur, si modo ibi loco x et n scribatur $\frac{n}{2}$, quocirca colligitur statim series quaesita:

$$1-\frac{n}{8}xx+\frac{n(n-6)}{8\cdot 16}x^4-\frac{n(n-8)(n-10)}{8\cdot 16\cdot 24}x^6+\frac{n(n-10)(n-12)(n-14)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^8$$

quippe cuius summa est

$$=\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n.$$

COROLLARIUM

33. Sumte n negativo, ut prodeat haec series:

$$1+\frac{n}{8}xx+\frac{n(n+6)}{8\cdot 16}x^4+\frac{n(n+8)(n+10)}{8\cdot 16\cdot 24}x^6+\frac{n(n+10)(n+12)(n+14)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^8$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\left(\frac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{x}\right)^n.$$

SCHOLION

34. Omnes series istas, quarum summam hic assignavi, in hac complecti licet:

$$s = 1 + \frac{n}{1}y + \frac{n(n+3)}{1\cdot 2}yy + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}y^4$$

eritque

$$s = \left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n};$$

unde patet, si fuerit $4y > 1$, seriei summam esse imaginariam, realem si sit $4y < 1$. Casu autem $y = \frac{1}{4}$ erit, uti iam supra observavimus,

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \text{etc.} =$$

Verum illa series pluribus modis transformari potest, ex quibus hunc casum affero, qui oritur differentialibus sumtis; erit scilicet

$$\frac{ds}{dy} = n + \frac{n(n+3)}{1}y + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}yy + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 +$$

At est

$$\frac{ds}{dy} = +n\left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-4y)}}.$$

are per n dividendo, huius seriei

$$1 + \frac{n+3}{1} y + \frac{(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2} yy + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \text{etc.}$$

mma est

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2} \right)^{-n-1}.$$

l scribendo $n = m - 3$, huius seriei

$$1 + \frac{m}{1} y + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} yy + \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3$$

$$+ \frac{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^4 + \text{etc.}$$

mma est

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}} \left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2} \right)^{-m+2}.$$

CONTINUATIO FRAGMENTORUM EX ADVERS MATHEMATICIS DEPROMTORUM[1]

Ex Commentatione 819 indicis Enestroemiani

Opera postuma 1, 1862, p. 506—513

106

(Krafft)

PROBLEMA

Si habeatur haec series

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \text{etc.},$$

eius quadratum s^2 commode per seriem exprimere.

Erit autem

$$\begin{aligned} s^2 = 1 &+ \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{etc.} \\ &- \frac{2}{1\cdot(1+a)} - \frac{2}{(1+a)(1+2a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+3a)} - \text{etc.} \cdots (= - \\ &+ \frac{2}{1\cdot(1+2a)} + \frac{2}{(1+a)(1+3a)} + \frac{2}{(1+2a)(1+4a)} + \text{etc.} \cdots (= + \\ &- \frac{2}{1\cdot(1+3a)} - \frac{2}{(1+a)(1+4a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+5a)} - \text{etc.} \cdots (= - \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Erit vero

$$A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{(1+a)(1+2a)} + \frac{1}{(1+2a)(1+3a)} + \text{etc.}$$

1) Vide notam 1 ad p. 504 vol. I6 adiectam. C. B.

$$A = \frac{1}{a}\cdot 1.$$

...er

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+3a} - \text{etc.}\right)$$

$$B = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right).$$

modo

$$\ldots a\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+5a} + \frac{1}{1+3a} - \frac{1}{1+6a} + \text{etc.}\right)$$

$$C = \frac{1}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right)$$

porro. Quocirca fiet

$$\ldots^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{etc.}$$

$$-\frac{2}{a}\cdot 1 + \frac{2}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.},$$

...partis posterioris valor ita investigetur: Ponatur

$$z = -\frac{2x}{a}\cdot 1 + \frac{2x^2}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^3}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{a}\cdot 1 + \frac{2x}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^2}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.},$$

$$\frac{x\,dz}{dx} = \qquad -\frac{2x}{a}\cdot 1 \qquad + \frac{2x^2}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) \qquad - \text{etc.}$$

adeoque

$$\frac{(1+x)dz}{dx} = -\frac{2}{a} + \frac{2x}{a(1+a)} - \frac{2x^2}{a(1+2a)} + \text{etc.}$$

Ponatur $x = y^a$, ut habeatur

$$\frac{(1+y^a)dz}{ay^{a-1}dy} = -\frac{2}{a} + \frac{2y^a}{a(1+a)} - \frac{2y^{2a}}{a(1+2a)} + \text{etc.}$$

seu

$$\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -\frac{2y}{1} + \frac{2y^{a+1}}{1+a} - \frac{2y^{2a+1}}{1+2a} + \text{etc.},$$

$$\frac{d\cdot\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy}}{dy} = -2 + 2y^a - 2y^{2a} + 2y^{3a} - \text{etc.} = \frac{-2}{1+y^a},$$

ergo

$$\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -2\int\frac{dy}{1+y^a}$$

et

$$dz = \frac{-2y^{a-2}dy}{1+y^a}\int\frac{dy}{1+y^a},$$

consequenter

$$z = -2\int\frac{y^{a-2}dy}{1+y^a}\int\frac{dy}{1+y^a}.$$

Posito ergo $y = 1$ erit quadratum quaesitum

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \text{etc.} + z.$$

Hic vero occurrit casus memorabilis, quando $a = 2$ ideoque

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4};$$

tum autem fit

$$z = -2\int^1\frac{dy}{1+y^2}\int\frac{dy}{1+y^2} = -(\text{Arc. tang. } y)^2 = -\frac{\pi^2}{16},$$

unde tandem oritur

$$s^2 = \frac{\pi^2}{16} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} - \frac{\pi^2}{16}$$

oque

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{8}.$$

autem fuerit $a=1$ ideoque

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}=\log.2,$$

$$z=-2\int\frac{dy}{y(1+y)}\int\frac{dy}{1+y}=-2\int\frac{dy\log.(1+y)}{y(1+y)}$$

ponendum erit post integrationem $y=1$, eritque

$$s^2=(\log.2)^2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}-2\int\frac{dy\log.(1+y)}{y(1+y)}$$

Adversaria mathematica t. I, p. 162—164.

107

(N. Fuss)

THEOREMA

Proposita serie potestatum quacunque

$$P=1+x^\alpha+x^\beta+x^\gamma+x^\delta+\text{etc.}$$

ue sumatur potestas exponentis λ, nempe P^λ, in qua evoluta occurrat terminus , eius coëfficiens $[n]$ ita pendebit ab aliquibus praecedentium, ut sit

$$n[n]=\frac{+\lambda\alpha}{-(n-\alpha)}[n-\alpha]\frac{+\lambda\beta}{-(n-\beta)}[n-\beta]\frac{+\lambda\gamma}{-(n-\gamma)}[n-\gamma]\frac{+\text{etc.}}{-\text{etc.}},$$

expressio eousque est continuanda, quamdiu numeri $n-\alpha$, $n-\beta$, $n-\gamma$ etc. fiunt negativi.

DEMONSTRATIO

Ponatur $P^\lambda=S$, erit

$$lS=\lambda lP \quad \text{et} \quad \frac{dS}{S}=\frac{\lambda dP}{P}$$

que

$$PdS=\lambda SdP,$$

quae aequalitas ita repraesentetur:

$$P\cdot\frac{xdS}{dx}=\lambda S\cdot\frac{xdP}{dx}.$$

Cum igitur sit

$$P=1+x^\alpha+x^\beta+x^\gamma+\text{etc.},$$

erit

$$\frac{xdP}{dx}=\alpha x^\alpha+\beta x^\beta+\gamma x^\gamma+\delta x^\delta+\text{etc.}$$

Iam in serie S occurrat terminus $[n]x^n$, praeter quem potestates, quae per $\frac{xdP}{dx}$ multiplicatae producere possunt termini ita repraesententur:

$$S=\cdots+[n]x^n+[n-\alpha]x^{n-\alpha}+[n-\beta]x^{n-\beta}$$

Hinc ergo erit

$$\lambda S\frac{xdP}{dx}=\cdots\lambda\alpha[n-\alpha]x^n+\lambda\beta[n-\beta]x^n+\lambda\gamma[n-$$

Deinde cum ex iisdem terminis sit

$$\frac{xdS}{dx}=\cdots n[n]x^n+(n-\alpha)[n-\alpha]x^{n-\alpha}+(n-\beta)[n-$$

quae in P ducta pro potestate x^n praebet sequentes term

$$n[n]x^n+(n-\alpha)[n-\alpha]x^n+(n-\beta)[n-\beta]x^n+(n-\gamma)$$

Hi igitur termini x^n utrinque debent poni aequales, unde

$$n[n]+(n-\alpha)[n-\alpha]+(n-\beta)[n-\beta]+(n-\gamma)[n$$
$$=\lambda\alpha[n-\alpha]+\lambda\beta[n-\beta]+\lambda\gamma[n-\gamma]+\lambda\delta[n-$$

unde conficitur

$$n[n]=\begin{matrix}\lambda\alpha\\-(n-\alpha)\end{matrix}[n-\alpha]\begin{matrix}+\lambda\beta\\-(n-\beta)\end{matrix}[n-\beta]\begin{matrix}+\lambda\gamma\\-(n-\gamma)\end{matrix}[n$$

Q. E. D.

COROLLARIUM

Cum in serie P exponentes ipsius x sint $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., in serie $S = P^{\lambda}$
e potestates non occurrunt, nisi quarum exponentes sunt summa λ termi-
um huius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., unde si in hac serie S omnes plane
estates ipsius x occurrant, id erit indicio omnes plane numeros reduci
se ad summam λ terminorum istius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. At si quae-
n potestas x^n non occurrat, tum eius coëfficiens $[n]$ aequabitur nihilo.
ifestum autem est nullum coëfficientem fieri posse negativum.

Adversaria mathematica t. I, p. 335, 336.

108

(N. Fuss)

THEOREMA

Summa huius seriei:

$$S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(l2)^2.$$

DEMONSTRATIO

Colligantur primo ultimi termini cuiusque membri, qui erunt

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}.$$

inde his terminis exclusis colligantur denuo termini extremi cuiusque membri

$$-\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} - \text{etc.} = -1.$$

s deletis colligantur denuo ultimi termini, qui sunt

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Simili modo ultimi sequentes erunt

$$-\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 6}-\frac{1}{4\cdot 7}-\text{etc.}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

Eodem modo sequentium summa erit

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

sicque porro. Quare si statuamus

$$t=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{e}$$

erit

$$S=\frac{\pi\pi}{6}-t.$$

Iam istam seriem postremam ita repraesentemus:

$$t=x-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{e}$$

unde sumto $x=1$ nostra series t prodit. Nunc autem fiet

$$\frac{dt}{dx}=1-x\left(1+\frac{1}{2}\right)+x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{e}$$

unde termini primi singulorum terminorum iuncti dant

$$1-x+xx-x^3+\text{etc.}=\frac{1}{1+x}.$$

Colligantur porro secundi

$$-\frac{1}{2}(x-xx+x^3-x^4+\text{etc.})=\frac{-\frac{1}{2}x}{1+x}.$$

Tertii dabunt

$$+\frac{1}{3}(xx-x^3+x^4-x^5+\text{etc.})=\frac{\frac{1}{3}xx}{1+x}.$$

Sequentes erunt

$$\frac{-\frac{1}{4}x^3}{1+x},\quad \frac{+\frac{1}{5}x^4}{1+x}\quad \text{etc.}$$

Quamobrem erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx - \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}}{1+x}$$

fractio, cuius numerator $= \frac{1}{x}l(1+x)$, sicque

$$\frac{dt}{dx} = \frac{l(1+x)}{x(1+x)}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x},$$

per partes erit

$$dt = \frac{dx}{x}l(1+x) - \frac{dx}{1+x}l(1+x),$$

cuius posterioris membri integrale est

$$-\frac{1}{2}(l(1+x))^2 = -\frac{1}{2}(l2)^2.$$

Pro priore membro

$$\int \frac{dx}{x}l(1+x),$$

id erit

$$\int \frac{dx}{x}\left(x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}\right)$$

$$= x - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$

Unde facto $x = 1$ erit haec pars

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12}.$$

Consequenter habebimus

$$t = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

ergo summa seriei propositae

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(l2)^2.$$

THEOREMA

Sequentis seriei

$$S = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

summa erit

$$S = \frac{3\pi\pi}{32}.$$

DEMONSTRATIO

Colligantur hic iterum termini postremi singulorum membrorum

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

His deletis reliquorum ultimi termini colligantur, qui sunt

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} - \text{etc.} = -\frac{1}{2}\cdot 1.$$

Sequentium ultimi dant

$$+\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right);$$

sequentes erunt

$$-\frac{1}{1\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 9} - \frac{1}{5\cdot 11} - \text{etc.} = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

et ita porro. Hinc erit

$$S = \frac{\pi\pi}{8} - t$$

existente

$$t = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

Statuatur

$$t = \frac{xx}{2}\cdot 1 - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

fietque

$$\frac{dt}{dx} = x - x^3\left(1 + \frac{1}{3}\right) + x^5\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \text{etc.} = \frac{x}{1+xx},$$

ecundi termini

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{3} + \text{etc.} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{1+xx},$$

quentes dabunt

$$+\frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{1+xx},$$

quo erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{etc.}}{1+xx} = \frac{\text{Arc. tang. } x}{1+xx},$$

nsequenter

$$t = \int \frac{dx}{1+xx} \int \frac{dx}{1+xx},$$

ius integrale

$$t = \frac{1}{2}(\text{Arc. tang. } x)^2.$$

nc sumto $x = 1$ erit

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{32},$$

nsequenter

$$S = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{\pi\pi}{32} = \frac{3\pi\pi}{32}.$$

COROLLARIUM

Inventa hac summa si ipsam seriem propositam ita tractemus:

$$S = x - \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{x^5}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.},$$

fiat

$$\frac{dS}{dx} = 1 - xx\left(1 - \frac{1}{3}\right) + x^4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.},$$

nini primi dant

$$1 - xx + x^4 - x^6 + \text{etc.} = \frac{1}{1+xx},$$

ndi

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{xx}{1+xx},$$

tertii

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{x^4}{1+xx}$$

ideoque

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{x(1+xx)}\int\frac{dx}{1-xx}.$$

Est vero

$$\frac{1}{x(1+xx)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+xx},$$

ergo

$$S=\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx}-\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx}.$$

Cum igitur sit

$$\int\frac{dx}{1-xx}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\text{etc.},$$

erit

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx}=x+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}+\frac{x^7}{7^2}+\text{etc.}$$

Posito ergo $x=1$ erit

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{8}.$$

Quare, cum $S=\frac{3\pi\pi}{32}$, erit

$$\frac{3\pi\pi}{32}=\frac{\pi\pi}{8}-\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx};$$

unde sequitur

$$\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx}=\frac{\pi\pi}{32},$$

quem valorem non video quomodo directe erui posset.

PROBLEMA

Hanc seriem secundum numeros primos progredientem:

$$s = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \text{etc.},$$

...i numeri primi formae $4n-1$ habent signum $+$, reliqui formae $4n+1$ si-...um $-$, in seriem convergentem convertere.

SOLUTIO

Hoc duplici modo fieri potest. Cum enim primo sit[1]) productum

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \text{ etc.} = 1\,,$$

...i denominatores sunt numeri primi, numeratores vero pariter pares unitate ...l maiores vel minores, sequitur fore

$$s = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{7}\left(1 - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{11}\left(1 - \frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \text{etc.}$$

...inde cum sit[2])

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \text{ etc.} = 1,$$

...c sequitur fore

$$s = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{5}\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$- \frac{1}{11}\left(\frac{2 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{13}\left(1 - \frac{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \text{etc.},$$

...uae ambae series manifesto valde convergunt.

---

1) Vide Commentationem 72 indicis ENESTROEMIANI, theorema 11, *LEONHARDI EULERI Opera ...nia*, vol. I_{14}, p. 233. C. B.

2) Ibidem, theorema 14, loco citato p. 236. C. B.

THEOREMA

Posito $\frac{\pi}{4} = q$, si summae sequentium serierum ponantur

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = Aq,$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.} = 2Bqq,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.} = 4Cq^3,$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.} = 8Dq^4$$

etc.

coëfficientes ita a se invicem pendent, ut sit[1])

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{2AB}{4}, \quad D = \frac{2AC + BB}{6}, \quad E = \frac{2AD + }{8}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{10} \quad \text{etc.},$$

unde colliguntur isti valores:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{5}{24}, \quad F = \frac{2}{15}, \quad G = \frac{61}{720},$$

etc.,

ubi insuper litterae seorsim per 1, 2, 4, 8, 16, 32 etc. multiplica
Hinc istos numeros ulterius continuavi[2]), quos ergo cum potestatib
sequenti modo repraesento. Prior columna valet pro potestatibus
posterior vero pro paribus:

---

1) Confer Commentationem 130 indicis ENESTROEMIANI § 11, *LEONHARDI EULERI*
vol. I14, p. 418. C. B.

2) Ibidem § 10, vol. I14, p. 416. C. B.

$$Aq = 1 \cdot q, \qquad Bq^2 = 1 \cdot 2q^2,$$

$$Cq^3 = \frac{1}{2} \cdot 4q^3, \qquad Dq^4 = \frac{1}{3} \cdot 8q^4,$$

$$Eq^5 = \frac{5}{8 \cdot 3} \cdot 16q^5, \qquad Fq^6 = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 32q^6,$$

$$Gq^7 = \frac{61}{16 \cdot 9 \cdot 5} \cdot 64q^7, \qquad Hq^8 = \frac{17}{9 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 128q^8,$$

$$Jq^9 = \frac{277}{128 \cdot 9 \cdot 7} \cdot 256q^9, \qquad Kq^{10} = \frac{2 \cdot 31}{81 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 512q^{10},$$

$$Lq^{11} = \frac{19 \cdot 2659}{256 \cdot 81 \cdot 25 \cdot 7} \cdot 1024q^{11} \qquad Mq^{12} = \frac{2 \cdot 691}{81 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 11} \cdot 2048q^{12}$$

etc. etc.

Quodsi litterae posterioris columnae ordine dividantur per hos numero $2 \cdot 15$, $2 \cdot 63$ etc., prodeunt meae fractiones $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{945}$, $\frac{1}{9450}$ etc.[1])

Supra habuimus haec duo producta:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \text{etc.} = 1$$

et

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \text{etc.} = 1;$$

horum prius per posterius divisum dat

$$1 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \text{etc.} = 1.$$

Hae fractiones invertantur et sumantur logarithmi, eritque

$$l\frac{6}{4} + l\frac{6}{8} + l\frac{10}{12} + l\frac{14}{12} + \text{etc.} = 0.$$

Cum igitur sit

$$l\frac{6}{4} = l\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}, \qquad l\frac{6}{8} = l\frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}} \quad \text{etc.},$$

1) Ibidem § 29, loco citato p. 440. C. B.

evolutis logarithmis semissis dabit hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} \\ -\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^7} \\ -\frac{1}{11} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{11^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11^7} \\ +\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13^7} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \text{etc.} =$$

Hinc ergo erit

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \text{etc.} \\ +\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} - \text{etc.}\right) \\ +\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{11^5} + \frac{1}{13^5} + \frac{1}{17^5} - \text{etc.}\right) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

Hinc porro

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \text{etc.} = S = \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3}\right.$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{11^5}\right.$$

$$+ \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} - \frac{1}{11^7}\right.$$

etc.

Unde sequitur nostram seriem S aliquantillo maiorem ess

OBSERVATIO

Per similes rationes inveni, si omnes numeri primi in duas partes dividantur unitate differentes, ac pro numeris primis formae $8n+1$ vel $8n+3$ partes maiores pro numeratoribus, minores vero pro denominatoribus sumantur; pro his autem numeris $8n-1$ vel $8n-3$ minores pro numeratoribus et maiores pro denominatoribus sumantur, productum omnium harum fractionum erit $=1$, hoc est

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\text{etc.}=1.$$

COROLLARIUM

Transformatio seriei

$$S=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\text{etc.}$$

etiam hoc modo[1]) referri potest:

1) Huius transformationis demonstratio EULERI more conficienda hoc exemplo illustretur: Sit

$$P=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc.};$$

erit

$$P\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3^3}-\frac{1}{9^3}+\frac{1}{15^3}-\frac{1}{21^3}+\frac{1}{27^3}-\text{etc.},$$

unde oritur

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)=1+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\text{etc.}$$

Similiter, cum sit

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\frac{1}{5^3}=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{25^3}-\frac{1}{35^3}-\frac{1}{55^3}+\frac{1}{65^3}+\text{etc.},$$

erit

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)=1-\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\frac{1}{19^3}-\text{etc.}$$

Porro est

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\frac{1}{7^3}=\frac{1}{7^3}-\frac{1}{49^3}-\frac{1}{77^3}+\frac{1}{91^3}+\frac{1}{119^3}-\text{etc.},$$

unde fiet

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right)=1-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\frac{1}{19^3}-\frac{1}{23^3}+\text{etc.}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right)\text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} -\right.$$

$$+ \frac{1}{5}\left(Q\left(1+\frac{1}{3^5}\right)\left(1-\frac{1}{5^5}\right)\left(1+\frac{1}{7^5}\right)\text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{11^5} -\right.$$

$$+ \frac{1}{7}\left(R\left(1+\frac{1}{3^7}\right)\left(1-\frac{1}{5^7}\right)\left(1+\frac{1}{7^7}\right)\text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{11^7} -\right.$$

etc.,

ubi

$$P = 4Cq^3, \quad Q = 16Eq^5, \quad R = 64Gq^7 \quad \text{etc.}$$

Adversaria mathematica t. III, p. 104—107.

---

*Similibus operationibus pro singulis numeris primis imparibus institutis omnes seriei te*ter primum tollentur reperieturque

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right)\text{etc.} = 1.$$

Confer e. g. demonstrationem theorematis 8 in Commentatione 72 indicis ENESTROEMIANI *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I14, p. 230. C. B.

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS 14, 15, 16 INSUNT